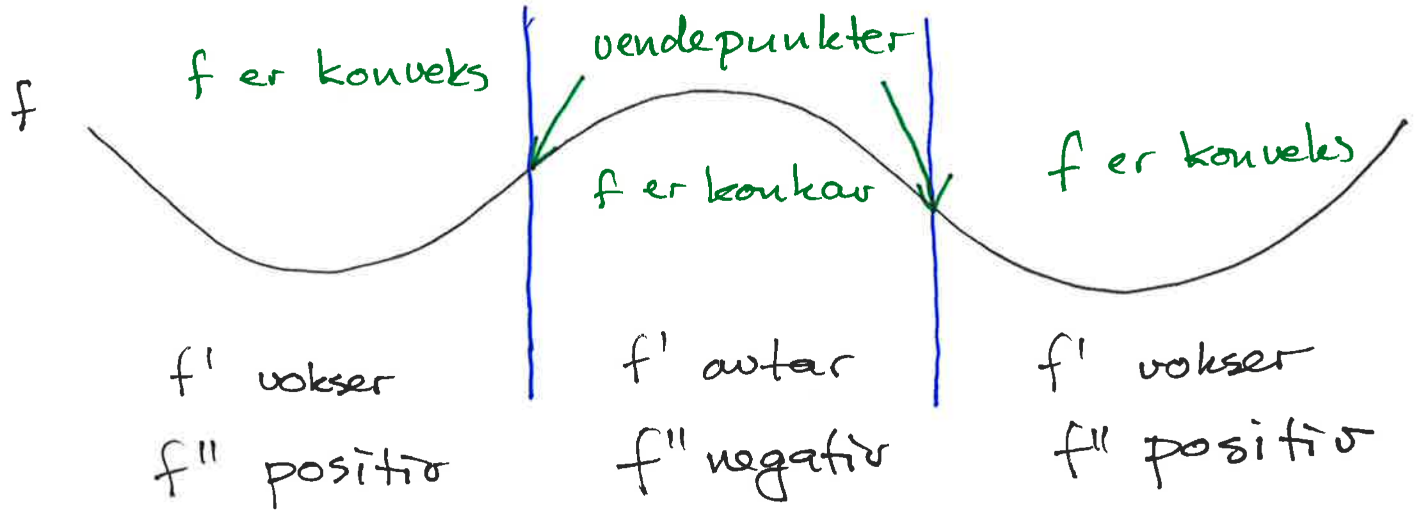
MET 1180, 15. forelesning, 16. nov. 2017, Runar Ile

1. Konvekse og konkave funksjoner. Annenderiverttesten.
2. l'Hopitals regel
3. Grenseinntekt & grensekostnad
4. Elastisitet.

Pensum

[E] 4.7-4.9

① Konvekse og konkave f. Annenderiverttesten



Konveks: Grafen krummer oppover (f' vokser)

Konkav: Grafen krummer nedover (f' avtar)

Vendepunkt: Overgangspunkt mellom konveks og konkav graf. (der f'' skifter fortegn)

Eks: $f(x) = x^3 - 12x^2 + 21x + 50$

Angir hvor grafen er konveks og konkav.

Løsning: $f'(x) = 3x^2 - 12 \cdot 2x + 21 \cdot 1 + 0$

$= 3x^2 - 24x + 21$

$$f''(x) = 3 \cdot 2x - 24 \cdot 1 + 0$$
$$= 6x - 24$$

Løser $f''(x) = 0$ dvs $6x - 24 = 0$

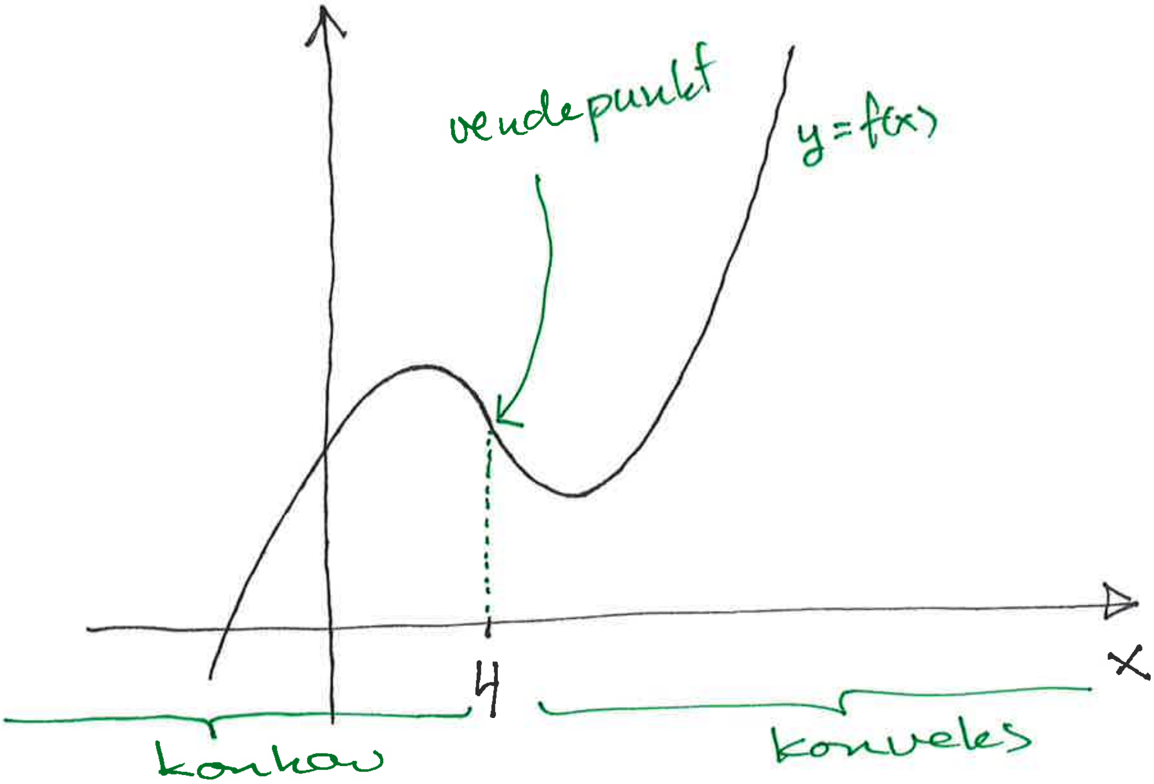
dvs $6x = 24$ dvs $\underline{x = 4}$.

		4	
f''	- - - - - - - -	0	————————
f'	avtar		vokser
f	konkav		konveks

Grafen til $f(x)$ er

- konkav for $x \in \langle -\infty, 4]$ og
- konveks for $x \in [4, \infty\rangle$

$x = 4$ er et vendepunkt for grafen til f.

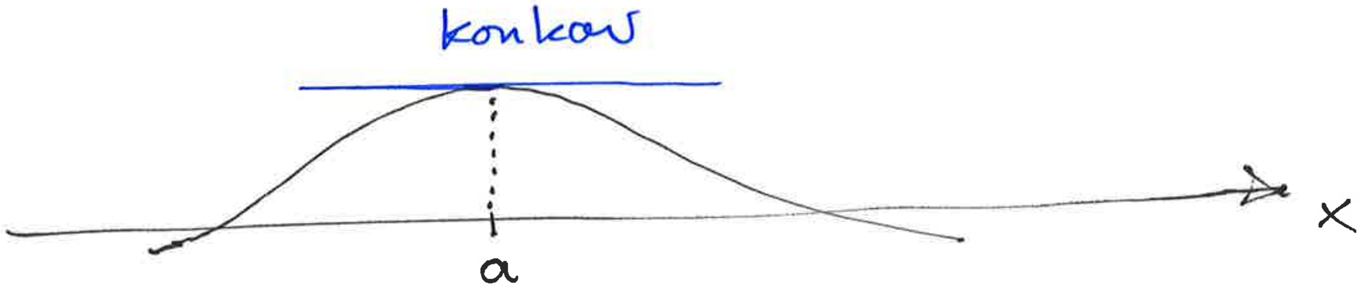


Se Oppg. 7 a
m. løsning
bakerst.

Annenderiverttesten

Hvis $f'(a) = 0$ og $f''(a) < 0$

gir $x = a$ et lokalt maks-punkt.



Hvis $f'(a) = 0$ og $f''(a) > 0$

gir $x = a$ et lok. min-punkt

Eks: $f(x) = 2x^{2,5} - 10x^{1,5} + 11$, $x > 0$

Finn stasjonære punkter og avgjør om de er lokale maks eller min.

Løsning.

Plan: (1) Finner $f'(x)$ og løser likningen $f'(x) = 0$

(2) Finner $f''(x)$ og setter inn de stasjonære punktene.

Gjennomføring:

① $f'(x) = 2\cdot 2{,}5\, x^{1{,}5} - 10\cdot 1{,}5\cdot x^{0{,}5} + 0$

$= 5x^{1{,}5} - 15x^{0{,}5}$

Løser $5x^{1{,}5} - 15x^{0{,}5} = 0 \quad | : 5x^{0{,}5}$

dvs $x - 3 = 0$

dvs $\underline{x = 3}$.

② $f''(x) = 5\cdot 1{,}5\cdot x^{1{,}5-1} - 15\cdot 0{,}5\cdot x^{0{,}5-1}$

$= 7{,}5\cdot x^{0{,}5} - 7{,}5\cdot x^{-0{,}5}$

$f''(3) = 7{,}5\cdot 3^{0{,}5} - 7{,}5\cdot 3^{-0{,}5}$

$= 7{,}5\sqrt{3} - 7{,}5\cdot \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$

Altså gir $x = 3$ et lokalt minimum

② l'Hopitals regel

For å finne asymptoter bruker vi grenseverdier
Ofte får vi 0 både i teller og nevner
eller både teller og nevner går mot $\pm\infty$

Så "$\frac{0}{0}$" el. "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$"

Eks 1: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x^3}{e^x - 1}$ " $\dfrac{0}{0}$ "

Eks 2: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln x - \ln 2}{(x-2)}$ " $\dfrac{0}{0}$ "

Eks 3: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x^3}{e^x - 1}$ " $\dfrac{-\infty}{\infty}$ "

<u>l'Hopitals regel</u>: I slike <u>ubestemte</u> tilfeller er

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (hvis denne finnes)

<u>Oppg</u>: Finn grensene i eks 1–3 ved å bruke l'Hopitals regel.

<u>Løsning</u>:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x^3}{e^x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-3x^2}{e^x} = \dfrac{-3 \cdot 0^2}{e^0} = \dfrac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln x - \ln 2}{(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\frac{1}{x} - 0}{1 - 0} = \dfrac{1/2}{1} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$.

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x^3}{e^x - 1} \overset{l'Hop}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-3x^2}{e^x} \overset{l'Hop}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-6x}{e^x}$

$\overset{l'Hop}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-6}{e^x} = \underline{\underline{0}}$

(3) Grenseinntekt og grensekostnad

x er antall produserte (og solgte) enheter

$K(x)$ er kostnadsfunksjonen

$I(x)$ er inntektsfunksjonen

$P(x) = I(x) - K(x)$ er profittfunksjonen

F.eks. $K(50)$ er kostnaden ved å produsere 50 enheter.

Kostnadsøkningen ved å produsere en enhet mer er

$$K(51) - K(50)$$

Dette er tilnærmet lik $K'(50)$ fordi $K'(50)$ er grensen til

$$\frac{K(50+h) - K(50)}{h}$$ når h går mot 0.

Setter $h = 1$ og får $\dfrac{K(51) - K(50)}{1}$

Kaller $K'(x)$ for grensekostnaden (marginalkostnaden) ved å produsere x enheter

$K'(x)$ tolkes altså som kostnads-økningen ved å produsere en enhet mer enn x enheter.

$I'(x)$ kalles grenseinntekten.

$$P'(x) = I'(x) - K'(x)$$

kalles grenseprofitten

<u>Eks</u>: $K(x) = 0{,}002 \cdot x^2 + 5x + 10.000$

$$I(x) = 12x - 0{,}003 \cdot x^2$$

$$K(1000) = 0{,}002 \cdot 1000^2 + 5 \cdot 1000 + 10.000$$
$$= 17.000$$

$$K(1001) = 0{,}002 \cdot 1001^2 + 5 \cdot 1001 + 10.000$$
$$= 17.009{,}002$$

Kostnadsøkningen er

$$K(1001) - K(1000) = 17.009{,}002 - 17.000$$
$$= \underline{9{,}002}$$

ganske like

$$K'(x) = 0{,}004x + 5$$
$$K'(1000) = 0{,}004 \cdot 1000 + 5 = \underline{9}$$

Kostnadsoptimum

Enhetskostnad $\quad A(x) = \dfrac{K(x)}{x}$

Kostnadsoptimum er den x-verdien som gir lavest enhetskostnad.

Resultat: Anta at kostnadsoptimum $x = a$ ikke er et endepunkt, så har vi $K'(a) = A(a)$

Dvs kostnadsoptim er der grensekostnaden = enhetskostnaden

Eks: Anta $K(x) = 0{,}002x^2 + 5x + 10.000$

Da er $A(x) = \dfrac{K(x)}{x} = 0{,}002x + 5 + \dfrac{10.000}{x}$

Kostnadsoptim er løsningen på likningen

$$K'(x) = A(x)$$

dvs $\quad 0{,}004x + 5 = 0{,}002x + 5 + \dfrac{10\,000}{x}$

dvs $\quad 0{,}002x = \dfrac{10.000}{x}$

dvs $\quad x^2 = \dfrac{10.000}{0{,}002} = 5 \cdot 10^6$

Altså er $x = \sqrt{5 \cdot 10^6} = \sqrt{5} \cdot 10^3 \approx \underline{\underline{2236}}$ antall enheter som gir kostnadsoptimum.

Enhetskostnaden ved kostnadsoptimum $x = 2236$ er $A(2236)$

$$= 0{,}002 \cdot 2236 + 5 + \frac{10.000}{2236}$$

$$= \underline{\underline{13{,}94}}$$

---

(4) Elastisitet

– hva skjer med etterspørselen når vi endrer prisen?

Problem: Hvordan tallfester vi en prisøkning?

Eks 1) Prisen på olje øker fra 53 til 55 dollar pr. fat. Prisøkningen: 2 dollar/fat

2) Prisen på olje øker fra 33,33 cent/liter til 34,59 cent/l. P.økningen 1,26 cent/l

3) Prisen på olje øker fra 2790 til 2895 kr/m^3
P.økningen: 105 kr/m^3

Relativ prisøkning ("økningen i prosent")

1) $\dfrac{\overset{=\text{prisøkn.}}{55-53}}{\underset{100\% =}{53}} = 3{,}8\,\%$

2) $\dfrac{34{,}59 - 33{,}33}{33{,}33} = 3{,}8\%$

3) $\dfrac{2895 - 2790}{2790} = 3{,}8\%$

Vil tallfeste etterspørselsendringen,

Relativ etterspørselsendring =

$$\frac{\text{etterspørsel}_{\text{ny}} - \text{etterspørsel}_{\text{gammel}}}{\text{etterspørsel}_{\text{gammel}}}$$

Eks (forts) Prisen faller fra 80.880.000 fat/døgn til 80.330.000 fat/døgn

Relativ etterspørselsendring =

$$\frac{80.330.000 - 80.880.000}{80.880.000} = \underline{-0,68\%}$$

<u>Elastisiteten</u> av etterspørselen m.h.p. pris er

$$E = \frac{\text{relativ etterspørselsendring}}{\text{relativ prisendring}}$$

$$\overset{(\text{eks})}{=} \frac{-0,68\%}{3,8\%} = \underline{-0,18}.$$

Tolkning: Hvis prisen øker med 1% fra \$53/fat så faller etterspørselen med 0,18%

(men dette vil være noe annet for en annen pris enn \$53/fat)

Anta p = pris, x = ant. solgte enhet
(= etterspørsel)

Anta x er funksjon av p

dvs $x = D(p)$

Relativ etterspørselsendring (økerprisen m. h)

$$\frac{D(p+h) - D(p)}{D(p)} = 100\%$$

Relativ prisendring: $\frac{h}{p} = 100\%$

$$\text{Elastisiteten} = \frac{\text{rel. etterspørselsend.}}{\text{rel. prisendring}}$$

$$= \frac{\left(\frac{D(p+h)-D(p)}{D(p)}\right)}{\left(\frac{h}{p}\right)} \overset{\text{litt dg!}}{=} \frac{D(p+h)-D(p)}{h} \cdot \frac{p}{D(p)}$$

h liten

$$\approx D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)} = El_p\, D(p) = E(p)$$

(i eks økes inntekten når prisen
øker til \$55/fat)

$$I(p) = p \cdot D(p)$$

$$I'(p) = (p)' \cdot D(p) + p \cdot D'(p)$$

litt alg.

$$= \underbrace{D(p)}_{\text{større enn } 0} \cdot [1 + E(p)]$$

↑ elastisiteten

$I'(p)$ positiv hvis $E(p) > -1$
(kalles uelastisk etterspørsel)
m.h.p. pris p

$I'(p)$ neg. hvis $E(p) < -1$
(kalles elastisk etterspørsel)
m.h.p. pris p

og $E(p) = -1$ kalles
nøytralelastisk eters. m.h.p. pris p.

Oppgave 6

Du låner 400 000 kroner. Tilbakebetalingen skal skje etter annuitetsprinsippet med 20 årlige tilbakebetalinger. Den årlige renten er 3 %.

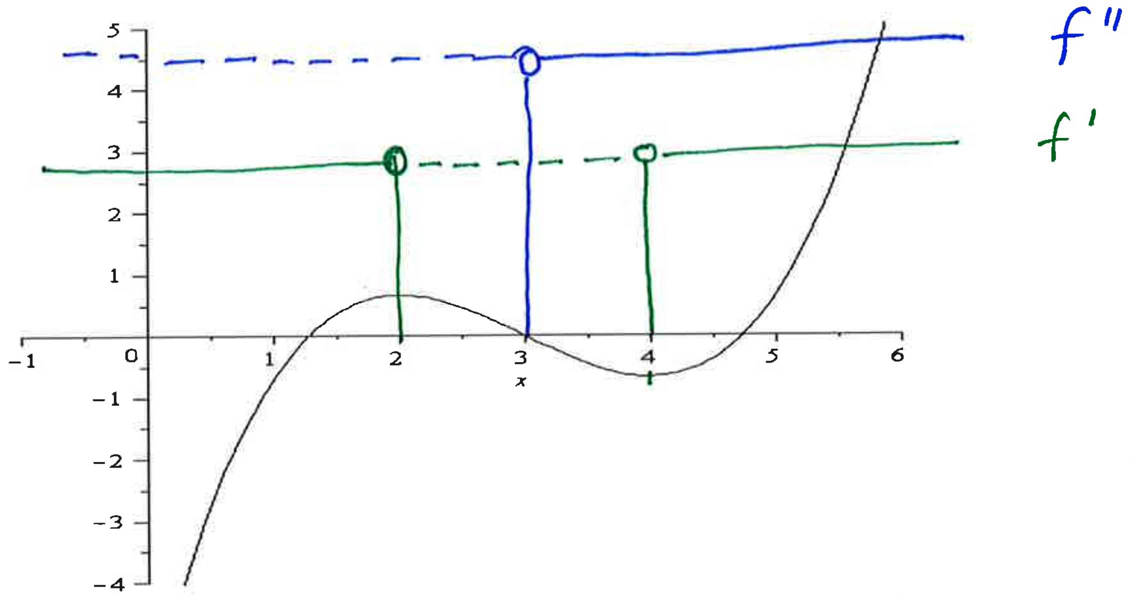
a) Hvor stor blir den faste årlige tilbakebetalingen hvis første tilbakebetaling er ett år etter at du tok opp lånet?
b) Hvor mye er renter og hvor mye er avdrag i den første tilbakebetalingen?
c) Rett etter den første tilbakebetalingen settes renten opp til 4 %. Hvor mye blir den faste tilbakebetalingen heretter?

En investering på 500 000 kroner forrentes kontinuerlig med 4 % årlig rente.

d) Hvor stor er verdien av investeringen etter 12 år?
e) Hvor lang tid tar det før verdien av investeringen er fordoblet?

Oppgave 7

Nedenfor vises grafen til funksjonen $f(x)$.



a) Lag et fortegnskjema for $f'(x)$ og $f''(x)$.
b) Hvor mange nullpunkter har funksjonene nedenfor?

i) $g(x) = 3f(x)$
ii) $h(x) = f(x) + 3$

Begrunn svarene.