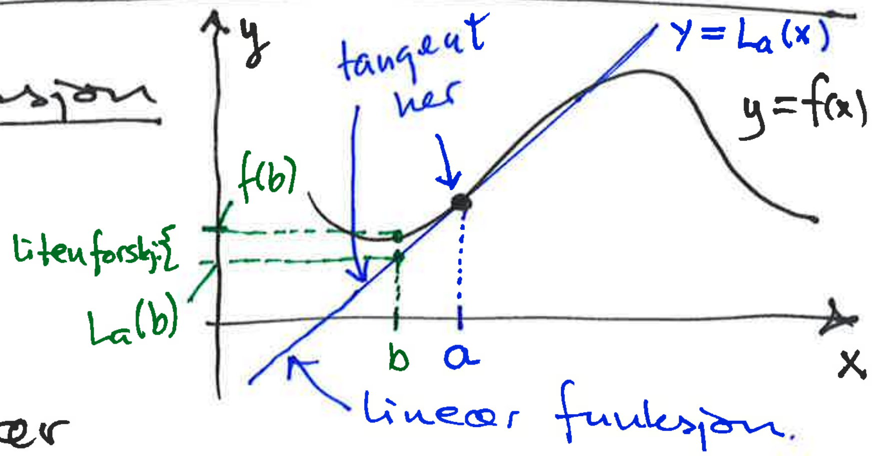
MET 1180, 16. forelesning, 22. nov. 2017, Runar Ile

1. Lineær approksimasjon
2. Taylorpolynomer
3. Binomialformelen

Pensum

[E] 4.10

1. Lineær approksimasjon



- Har komplisert funksjon $f(x)$
- Vil finne en lineær funksjon $L(x) = L_a(x)$ som er så godt tilpasset $f(x)$ rundt $x=a$ som mulig. Dvs:

0) $L(a) = f(a)$ (samme verdi i a)

1) $L'(a) = f'(a)$ (samme stig.-tall i a)

Ettpunktsformelen gir da at

$$L(x) - L(a) = L'(a)\cdot(x-a)$$

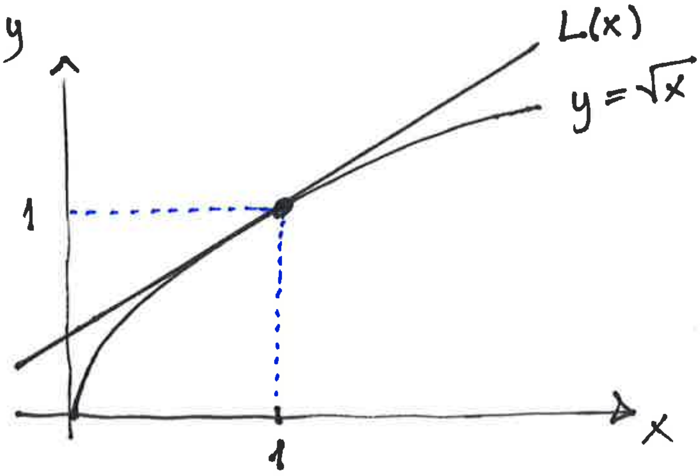
setter inn (0) & (1): $L(x) - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$

dvs $\boxed{L(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)}$

Dette er den lineære approksimasjonen til $f(x)$ i $x=a$.

Eks: $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad (x \geq 0)$.

$a = 1$



$$L_1(x) = L(x) = f(1) + f'(1)(x-1)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x = \underline{\underline{\frac{1}{2}(x+1)}}.$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

Kan bruke $L(x)$ til å tilnærme $f(x) = \sqrt{x}$ nær $x = 1$.

$$\sqrt{1{,}1} = f(1{,}1) \approx L(1{,}1)$$

$$= \frac{1}{2}(1{,}1 + 1)$$

$$= \underline{1{,}05}$$

(NB: $\sqrt{1{,}1} = 1{,}04881\ldots$)

$$\sqrt{2} = f(2) \approx L(2) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

(NB: $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$)

<u>Oppg</u>: Finn den lineære approksimasjonen $L_4(x) = L(x)$ til $f(x) = \sqrt{x}$ for $a = 4$.

Beregn $L_4(3)$ og $L_1(3)$. Hvilken gir best tilnærming til $f(3)$?

Løsning: $L_4(x) = f(4) + f'(4)\cdot(x-4)$

$$= \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4)$$

$$= 2 + \frac{1}{4}(x-4)$$

$$= \underline{\underline{1 + \frac{x}{4}}}.$$

$L_4(3) = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} = \underline{\underline{1{,}75}}$

$L_1(3) = \frac{1}{2}(3+1) = \underline{\underline{2}}$

Mens $\sqrt{3} = f(3) = 1{,}73205\ldots$

Så $L_4(3)$ gir en bedre tilnærming til $f(3)$ enn $L_1(3)$.

Oppg: Finn den lineære approksimasjonen $L(x) = L_0(x)$ til $f(x) = e^x$ for $a=0$.

Bruk $L(x)$ til å tilnærme e.

Løsning: $L_0(x) = f(0) + f'(0)\cdot x$

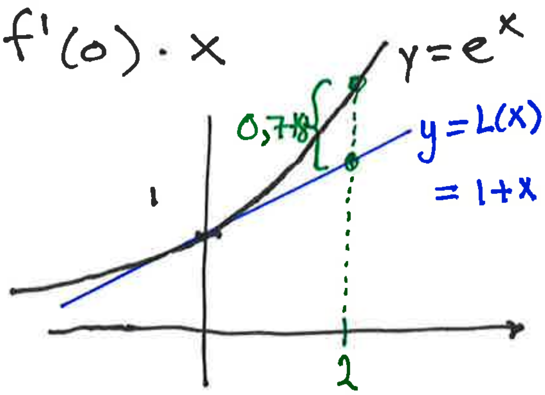
$$= 1 + x$$

$f(x) = e^x$
$f'(x) = e^x$
$f(0) = e^0 = 1$
$f'(0) = 1$

$e = f(1) \approx L(1)$

$= 1 + 1 = 2$

(men $e = 2{,}71828\ldots$)



Kvadratisk approksimasjon

Vil finne en kvadratisk funksjon $Q_a(x)$ som tilnærmer $f(x)$ optimalt ved $x = a$.

Vil ha at:

$$\left.\begin{array}{ll} 0) & Q(a) = f(a) \\ 1) & Q'(a) = f'(a) \end{array}\right\} \text{ gir } L_a(x)$$

$$2) \quad Q''(a) = f''(a)$$

Forslag: $Q_a(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + C\cdot(x-a)^2$

Hva er C? $Q_a'(x) = 0 + f'(a) + 2C\cdot(x-a)$

$$Q_a''(x) = 2C$$

så $Q_a''(a) = 2C \overset{(2)}{=} f''(a)$

dvs $C = \dfrac{f''(a)}{2}$

Så $$\boxed{Q_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}$$

er den kvadratiske approksimasjonen til $f(x)$ ved $x = a$.

Eks: $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$. Finn $Q_1(x)$.
og bruk $Q_1(x)$ til å tilnærme $\sqrt{2}$

Løsning:

$$Q_1(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{-\frac{1}{4}}{2}(x-1)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$$

$$\sqrt{2} = f(2) \approx Q_1(2) = 1 + \frac{1}{2}(2-1) - \frac{1}{8}(2-1)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{11}{8} = 1{,}375$$

(NB: $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$)

Oppg: $f(x) = e^x$, $a = 0$. Finn $Q_0(x)$.
Bruk $Q_0(x)$ til å tilnærme e.

Løsning:

$$Q_0(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2$$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

$$= 1 + 1\cdot x + \frac{1}{2}\cdot x^2$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$e = f(1) \approx Q_0(1) = 1 + 1 + \frac{1^2}{2} = 2{,}5$$

$(e = 2{,}71828\ldots)$

② Taylorpolynomer

Taylorpolynomet til $f(x)$ ved $x=a$ med grad n er det polynomet av grad n som passer best til $f(x)$ ved $x=a$.

$P(x)$ // $P_{n,a}(x)$

Dvs

$$\left.\begin{aligned} &(0)\ P(a) = f(a) \\ &(1)\ P'(a) = f'(a) \\ &(2)\ P''(a) = f''(a) \end{aligned}\right\} Q_a(x)$$

$$(3)\ P'''(a) = f'''(a)$$

$$\vdots$$

$$(n)\ P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

Det er bare ett polynom av grad n som tilfredsstiller disse $(n+1)$ betingelsene:

$$\boxed{P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

$$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$$ („fire fakultet")

$$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5\cdot 24 = 120$$ („fem fakultet")

$$P_{3,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3$$

Eks: $f(x) = e^x$, $a = 0$. Da er

Taylorpolynomet av grad n for $f(x)$ ved $a = 0$ gitt som

$$f(x) \approx P_{n,0}(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= 1 + 1\cdot x + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$= \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}}_{P_{5,0}(x)} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$f'(x) = e^x$, $f'(0) = e^0 = 1$
$f''(x) = e^x$, $f''(0) = e^0 = 1$
$\vdots$ $\vdots$
$f^{(n)}(x) = e^x$ $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

$n = 5$ gir tilnærmingen

$$e = f(1) \approx P_{5,0}(1) = 1 + 1 + \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{6} + \frac{1^4}{24} + \frac{1^5}{120}$$

$$= \underline{2{,}71}6666\dots$$

$$(e = \underline{2{,}71}83\dots$$

– tar vi med flere ledd ($n=10$, $n=100$, $n=1000$) ....
får vi bedre og bedre tilnærminger.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

$$\underbrace{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_{n,0}(x)$$ gjelder mange $f(x)$, men ikke alle

Oppg: $f(x) = \ln(x)$, $a = 1$. Finn $P_{3,1}(x)$ og $P_{4,1}(x)$.

Løsning: $\underset{\text{grad}\quad a}{P_{3,1}}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$

$f(x) = \ln(x)$
$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$
$f''(x) = -1 \cdot x^{-2}$
$= -x^{-2}$
$f'''(x) = 2x^{-3}$

$$= 0 + \frac{1}{1}(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

$$P_{4,1}(x) = P_{3,1}(x) + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

$f^{(4)}(x) = 2 \cdot (-3) x^{-4}$
$= -6x^{-4}$

$$= P_{3,1}(x) + \frac{-6}{4!}(x-1)^4$$

$$= P_{3,1}(x) - \frac{1}{4}(x-1)^4$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$$

$$P_{n,1}(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$$

Taylorrekken: $\ln(x) = \lim_{n \to \infty} P_{n,1}(x)$

3 Binomialformelen.

$\binom{n}{r}$ = antall måter man kan velge r objekter ut av en mengde med n objekter

leser: „n over r", skriver også $\binom{n}{r} = {}_nC_r$

Oppg: Beregn $\binom{4}{2}$. Svar: $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2}$

Oppg: Beregn $\binom{5}{3}$. Svar: $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}$

Newtons binomialformel:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\dots(n-r+1)}{r\cdot(r-1)(r-2)\cdots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Eks: $(x+y)^4 = x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Oppg: $(x+y)^2 = ?$