

FORELESNING 17

EIVIND ERIKSEN, JAN 10 2018

MET1180

BI

MATEMATIKK

Plan:

- ① Antiderivasjon og integrasjon
- ② Integrasjonsregler
- ③ Substitusjon

Pensum:

[E] S.1 - S.2

Vår semesteret:

MET1182

Emner:

① Integrasjon Kap. 5

② Lineære lkn. system
og matriser

Kap 6

③ Funksjoner i to
variable

Kap. 7

Ekamen:

Avslutende eksamen

MET 11803

30/05

Kont.

$\begin{cases} \text{MET11801} \\ \text{MET11802} \end{cases}$

Oppgaveresning: Ons 14-16 i BZ

Kontortid: Tir 12-14

① Antiderivasen og integrasjon

Integral:

$$\int 3x^2 dx = \text{alle funksjoner med derivert lik } 3x^2$$

$$= x^3 + C$$

Skrivemåte:

$\int$: integrasjonstegn

dx : x er derivasjon/integrasjons-variabel.

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$\{x^3, x^3+1, x^3-7, x^3+\sqrt{2}, \dots\}$$

Integrasjonskonstanten

$+C$ = legger til en
vilkårlig konstant

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

ubestemt
integral

$F(x)$ er en funksjon
slik at $F'(x) = f(x)$,
kallas en antiderivert
av $f(x)$

Exs:

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} + C$$

$\underset{x^{1/2}}{\quad}$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(x^{3/2})' = \frac{3}{2} \cdot x^{1/2}$$

$$\left(\frac{2}{3} x^{3/2}\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{1/2}$$

Resultat:

BI

Hvis $F_1(x)$ og $F_2(x)$ er to antideriverede til $f(x)$, dvs at $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ for alle x på et interval I , så er $F_2(x) = F_1(x) + C$.

Forklaring:

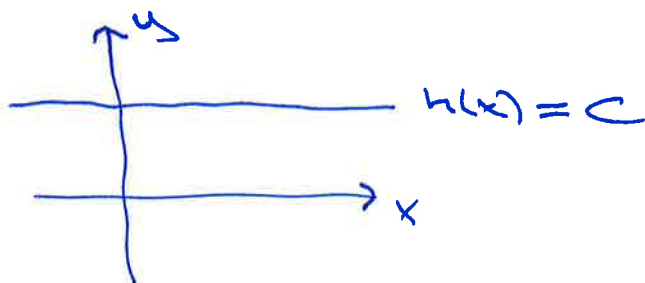
Hvis $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$, kan vi se på differensen

$$h(x) = F_2(x) - F_1(x)$$

Den har derivert

$$h'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Det betyder at $h'(x) = 0$ for alle x , så $h(x)$ må være en konstant



Derfor er $h(x) = F_2(x) - F_1(x) = C$

$$F_2(x) = F_1(x) + C$$

~~$F_2(x) = F_1(x) + C$~~

② Integrasjonsregler:

$$\int f(x) dx$$

① Potensregel: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$

Gjelder for alle tall n bortsett fra $n = -1$

Eksp: $\int x^{\textcircled{1/2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1} + C$

$$= \frac{1}{3/2} x^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

Forklaring: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$$\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right)' = \frac{1}{n+1} \cdot \cancel{(n+1)} \cdot x^n = x^n$$

Ex. $\int (3x^2 + x^4) dx = \int 3x^2 dx + \int x^4 dx$
 $= 3 \cdot \int x^2 dx + \int x^4 dx = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3\right) + \left(\frac{1}{5}x^5\right) + C$

② Integrasjon av summer, differanser, og multipler:

$$\int u(x) + v(x) dx = \int u(x) dx + \int v(x) dx$$

$$\int u(x) - v(x) dx = \int u(x) dx - \int v(x) dx$$

$$\int c \cdot u(x) dx = c \cdot \int u(x) dx \quad (c \text{ er en } \underline{\underline{\text{konstant}}})$$

$\Rightarrow \underline{\underline{x^3 + \frac{1}{5}x^5 + C}}$

Alt: $\int 3x^2 + x^4 dx = 3 \cdot \int x^2 dx + \int x^4 dx$
 $= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1\right) + \frac{1}{5}x^5 + C_2$
 $= x^3 + 3C_1 + \frac{1}{5}x^5 + C_2 = x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \underbrace{(3C_1 + C_2)}_C$

Husk: integrasjons konstanten $+ C$ betyr at vi legger til et hvilket som helst konstant.

Oppgave: $\int \frac{3}{x^2} dx = -\frac{3}{x} + C$

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{x^2} dx &= \int 3 \cdot x^{-2} dx = 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C \\ &= -3 \cdot \frac{1}{x} + C \\ &= \underline{\underline{-\frac{3}{x} + C}} \end{aligned}$$

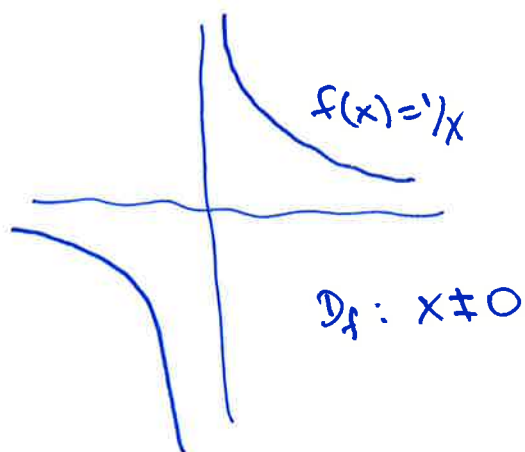
③ Integrasjon av noen andre funksjoner:

a) $\int e^x dx = e^x + C$

$\int a^x dx = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + C \quad \text{for } a > 0$

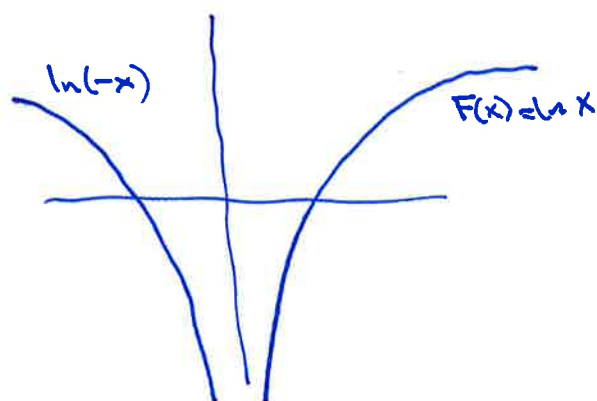
b) $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

Forklaring:



$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

$F(x) = \ln x, D_F: x > 0$



$F(x) = \ln(-x), D_F: x < 0$

Ekso:

$$\int e^{-2x} dx \quad \leftarrow \text{substitusjon}$$

$$\int x \cdot \ln x dx \quad \leftarrow \text{delvis integrasjon} \quad \int \ln x dx$$

$$\int \frac{x}{x+1} dx \quad \leftarrow \text{delbrøttoppspløtning}$$

Plan: Disse metodene skal vi så gjennom.

Ekso:

$$\int e^{-x^2/2} dx = ?$$



Resultat: Hvis $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon, så fins en funksjon $F(x)$ slik at

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

③

Substitusjon:

"kjerneregel"
for integrasjon

BI

Eks: $\int e^{-2x} dx = \int e^u dx$
 $u \equiv -2x$

$$e^{-2x} = e^u, \quad u = -2x$$

$$(e^{-2x})' = e^u \cdot u' = e^{-2x} \cdot (-2) = \underline{-2e^{-2x}}$$

Alt 1: $\int e^{-2x} dx = \frac{1}{-2} \cdot e^{-2x} + C = \underline{\underline{-\frac{1}{2}e^{-2x} + C}}$

$$\left(\frac{1}{-2} \cdot e^{-2x}\right)' = \frac{1}{-2} \cdot (-2) \cdot e^{-2x}$$

Alt 2: $\int e^{-2x} dx = \int e^u dx = \int e^u \cdot \frac{du}{(-2)}$

$$\boxed{u = -2x} \quad \boxed{du = u' \cdot dx} = \boxed{u = -2x} \quad \boxed{du = -2 dx} \leftarrow dx = \frac{du}{-2}$$

$$= \frac{1}{-2} \cdot \int e^u du = -\frac{1}{2} \cdot e^u + C$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{2}e^{-2x} + C}}$$

Formel:

$$\boxed{u = u(x)} \\ \boxed{du = u' \cdot dx}$$

Metode: Velg substitusjon

$u = u(x)$ og bruk likningene

til å gjøre om til et
integral i u .

Derefter løser vi integralet i u ,
og skriver svaret ut i x .

Ellis: $\int (x+1)^3 dx = \int x^3 + 3x^2 + 3x + 1 dx$
 $= \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C$

BI

Ved substitution:

$$\int (x+1)^3 dx = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x+1 \\ du = 1 \cdot dx \end{array}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4} \cdot (x+1)^4 + C}}$$

$$\int \textcircled{x} \cdot \ln(x^2+1) dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{du}{2x}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x^2+1 \\ du = \textcircled{2x} \cdot dx \end{array}}$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{\cancel{x} \cdot \ln(u)}{2\cancel{x}} du = \frac{1}{2} \int \ln u du$$

↑
 leres uha delvis
 integrasjon

$$\int \frac{1}{(1-x)^3} dx = \int \frac{1}{u^3} \cdot \frac{du}{-1} = - \int u^{-3} du$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = 1-x \\ du = -1 \cdot dx \end{array}}$$

$$= - \left(\frac{u^{-2}}{-2} \right) + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2} + C = \underline{\underline{\frac{1}{2 \cdot (1-x)^2} + C}}$$