

FORELESNING 2

Eivind Eriksen

AUG 31, 2017

MET1180

MATEMATIKK

Plan:

① Renteregning og velstfaktorer, Potenser.

② Nåverdi av kontantstrømmer

③ Endelige rekker

④ Annuiteter og annuitetslån

Program:

[E] 1.1-1.6

Dette utsettes
til neste gang
(1.5-1.6)

Oppgaveresning:

Torsdag
Tirsdag

14-16
11-13

B2-???

① Prosentregning:

Andeler: 53 av 200 $\rightarrow$ Forholdstall: $\frac{53}{200} = 0,265$

100% = 1

1 prosent: $\frac{53}{200} \cdot 100\% = 26,5\%$

0,265 = 26,5%

Relativt vekst:

En pris øker
fra 25 kr til 28 kr
" " " "
 P_0 P

Absolutt vekst:

$P - P_0 = 28 \text{ kr} - 25 \text{ kr} =$
" " " "
 ΔP 3 kr

(4 : dette, betyr endring)

Relativ velst
(prosentvis velst) :

$$\frac{P - P_0}{P_0} = \frac{28 \text{ kr} - 25 \text{ kr}}{25 \text{ kr}} = \frac{3}{25} = 12\%$$

ΔP (endring i pris)
start pris

$$= 0,12$$

Velstfaktor. Hvis den relative (prosentvise) velsten er r , så er velstfaktoren

$$\underline{1+r}$$

Ek: $r = 0,12 \rightarrow$ velstfaktoren $1+r = 1,12$

$$P_0 = 25 \text{ kr} : P = P_0 \cdot (1+r) = 25 \text{ kr} \cdot 1,12$$

$$= \underbrace{25 \text{ kr} \cdot 1}_{P_0 = 25 \text{ kr}} + \underbrace{25 \text{ kr} \cdot 0,12}_{\Delta P = 3 \text{ kr}} = \underline{28 \text{ kr}}$$

Ex: En bolig vokser i verdi med 10%, og faller deretter i verdi med 30% året etter.

Samlet prisendring

$$\begin{aligned} r_1 &= 10\% = 0,10 \rightarrow 1+r_1 = 1,10 \\ r_2 &= -30\% = -0,30 \rightarrow 1+r_2 = 0,7 \\ &\quad \downarrow \\ r &= -0,23 = \underline{\underline{-23\%}} \quad 1+r = 0,77 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} &1+r_1 = 1,10 \\ &1+r_2 = 0,7 \end{aligned} \right\} (1+r_1) \cdot (1+r_2) = 1,10 \cdot 0,7 = \frac{0,77}{1+r}$$

$$P_0 \rightarrow P_0 \cdot 1,10 \rightarrow (P_0 \cdot 1,10) \cdot 0,70$$

$$= P_0 \cdot 1,10 \cdot 0,70$$

Veikstfaktorer

Relative (prosentvise) endringer $r_1, r_2, \dots, r_n$
gir en samlet veikstfaktor

$$(1+r_1) \cdot (1+r_2) \cdot \dots \cdot (1+r_n) = 1+r$$

der r er den samlede prosentvise veksten

$$r = (1+r_1)(1+r_2) \dots (1+r_n) - 1$$

Ex: $n=2$

$$\begin{aligned} r &= (1+r_1) \cdot (1+r_2) - 1 \\ &= \cancel{1} + r_1 + r_2 + r_1 r_2 - \cancel{1} \\ &= \underline{r_1 + r_2 + r_1 r_2} \end{aligned}$$

Renteregning: Bank-kto med 3% rente
Etter 5 år er 100.000 kr vokst
til?

$$B_0 = 100.000$$

$$r = 3\% = 0,03 \rightarrow 1+r = 1,03$$

$$\left. \begin{array}{l} B_0 = 100.000 \\ r = 3\% = 0,03 \rightarrow 1+r = 1,03 \end{array} \right\} \begin{aligned} B &= B_0 \cdot (1+r)^5 \\ &= 100.000 \cdot 1,03^5 \end{aligned}$$

$$100.000 \times 1,03 \boxed{^5} =$$

$$\underline{\underline{115.927,41}}$$

Kalkulator:

① Algebraic, ikke chain

Endrer: ~~blå~~ shift + $\boxed{ON}$

Test: $1 \oplus 2 \otimes 3 = 7$

② Antall desimaler

red shift + $\boxed{=}$ 8

Renteterminer:

Kapitalisering:

når renter legges
til balansen

Rentetermin:

perioden mellom to
kapitaliseringer

Terminrente:

rente per rentetermin

Ek:

Nominell
rente $r = 3\%$ med månedlig kapitalisering

terminrente: $3\%/12$

$$100.000 \cdot (1 + 0,0025)^{5 \cdot 12} = 0,03/12 = \underline{0,0025}$$

$$B = 100.000 \cdot (1,0025)^{(5 \cdot 12)} = 100.000 \cdot 1,0025^{60}$$

$$= 100.000 \cdot 1,0025^{60} = \underline{\underline{116.161,68 \text{ kr}}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \underbrace{100.000}_{\text{prinsippel}} + & \underbrace{15.000}_{\text{rente på prinsippel}} + & \underbrace{1.161,68}_{\text{renter rente}} \end{array} \right)$$

Renteresning:

Hvis r er den nominelle renten, det er N renteterminer per år, så vil en balanse på B_0 vokse til

$$B = B_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{N}\right)^{N \cdot n}$$

i løpet av n år.

Spesialtilfelle $N=1$: $B = B_0 \cdot (1+r)^n$

— 11 — $N=12$: $B = B_0 \cdot (1+r/12)^{12 \cdot n}$

terminrenten

antall terminer

Effektiv rente:

Nominell rente r , antall terminer per år N , så er effektiv rente:

$$r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{r}{N}\right)^N - 1$$

Sammenlign: 1) 6% nominell rente, mnd. kapitalisering
2) 6.75% ———, årlig kapitalisering

$$1) 1+r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12} = 1,005^{12} \approx 1,0617$$

$$r_{\text{eff}} = 1,0617 - 1 = 0,0617 = \underline{\underline{6,17\%}}$$

$$2) 1+r_{\text{eff}} = (1 + 0,0675/1)^1 = 1,0675$$

$$r_{\text{eff}} = 1,0675 - 1 = 0,0675 = \underline{\underline{6,75\%}} \leftarrow \underline{\underline{\text{Best}}}$$

Potenser. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ faktorer}}$ når $n=1,2,3,4,\dots$

Regneregler: 1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ 2) $a^n / a^m = a^{n-m}$ 3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Defn. ($a \neq 0$) $a^0 = 1$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$... $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ex: $\frac{2^2}{2^4} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2}$
 $\therefore 2^{2-4} = 2^{-2} //$

$\frac{2^2}{2^2} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 1$
 $//$
 $2^{2-2} = 2^0 //$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0)$$

defn.

Ex: $3^{1/2} = \sqrt{3}$

Forklaring av defn:

$$\begin{cases} (3^{1/2})^2 = 3^1 = 3 \\ (\sqrt{3})^2 = 3 \end{cases}$$

Ex: $\sqrt[3]{17} = 17^{1/3} = 17^{\boxed{1/3}} (1/3)$

$$\sqrt[3]{17} \approx \underline{\underline{2.57}}$$

Rotuttrykk kan uttrykkes som potenser med rasjonale eksponenter

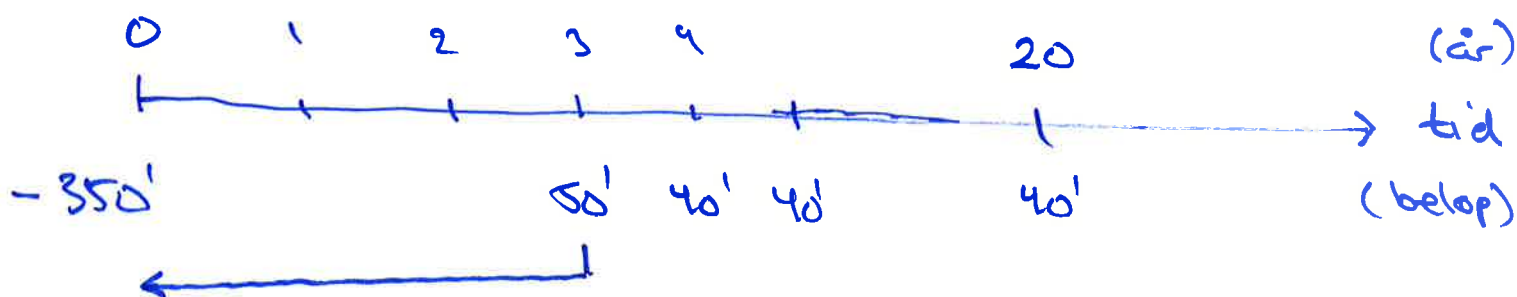
Ex: $\sqrt[3]{-1} = -\sqrt[3]{1} = \underline{\underline{-1}}$

~~$\frac{1}{(-1)^{1/3}}$~~

$$\sqrt[3]{-17} = -\sqrt[3]{17} = -17^{1/3} \approx \underline{\underline{-2.57}}$$

② Nåverdi av kontantstrømmer

Kontantstrøm: inn- og utbetalinger som innbrenner på ulike tidspunkt.



Kontantstrøm: $(I_0, I_1, I_2, \dots, I_{20})$
 $= (-350.000, 0, 0, 50.000, 40.000, \dots, 40.000)$

Nåverdi: $r = \text{diskonteringsrenten}$

Nåverdi av innbetaling I_n etter n år er

$$\frac{I_n}{(1+r)^n} = I_n \cdot (1+r)^{-n}$$

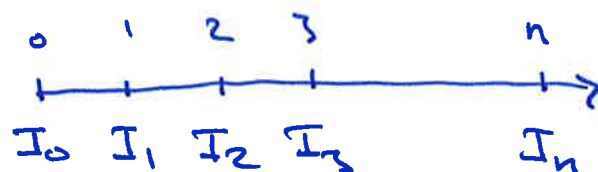
Ex. Innbetaling på 50.000 kr om tre år, diskonteringsrente 10%:

Nåverdi: $\frac{50.000}{1,10^3} = 50.000 \cdot 1,10^{-3}$
 $\approx \underline{\underline{37.566 \text{ kr}}}$

Med lavere disk. rente blir nåverdien større

Nåverdi av kontantstrøm:

Summen av nåverdier til utbetalingene i kontantstrømmen.

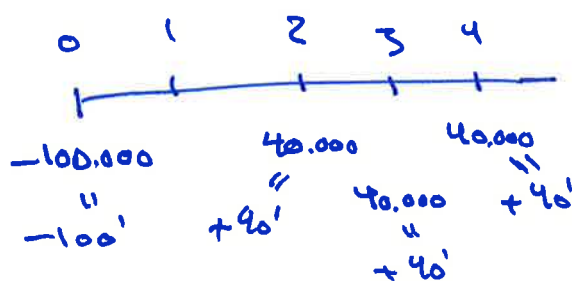


Nåverdi av kontantstrøm:

Med kontantstrømmen $(I_0, I_1, I_2, \dots, I_n)$ blir nåverdien ved diskonteringsrate r lik

$$I_0 + \frac{I_1}{1+r} + \frac{I_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{I_n}{(1+r)^n}$$

Ex:



$(r=10\%)$

Nåverdi: $-100' + \frac{40'}{1,10^1} + \frac{40'}{1,10^2} + \frac{40'}{1,10^3} + \frac{40'}{1,10^4}$

$$\begin{aligned} &\approx -100.000 + 36.364 + 33.058 + 30.053 + 27.321 \\ &= \underline{\underline{-9.569}} \end{aligned}$$