FORELESNING 21

MET1180 MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN, FEB 7 2018

Plan:

1. Lineære systemer
2. Gauss-eliminasjon

Pensum:

[E] 6.2–6.3

Eks:

$$\begin{aligned} 4x^3 - z &= 0 \\ x+y+z &= 0 \\ -x + 4z^3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4x^3 - z = 0 \implies \underline{z = 4x^3} \\ -x + 4z^3 = 0 \end{cases}$$

$$-x + 4\cdot(4x^3)^3 = 0$$

$$-x + 4\cdot 64\cdot x^9 = 0$$

$$x(-1 + 256\cdot x^8) = 0$$

$\underline{x=0}$ eller $256x^8 = 1$

$z = 0$

$x^8 = 1/256$

$\frac{1}{256} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{2^8}$

$x = \pm\sqrt[8]{1/256}$

$\underline{x = \pm 1/2}$

$\underline{z = \pm 1/2}$

$\underline{(x,z) = (0,0),\ (1/2, 1/2),\ (-1/2, -1/2)}$

$y = -x - z$

$(x,z) = (0,0)$: $y = 0$

$(x,z) = (1/2, 1/2)$: $y = -1$

$(x,z) = (-1/2,-1/2)$: $y = +1$

Løsninger:

$$(x,y,z) = (0,0,0),\ (1/2,-1,1/2),\ (-1/2,+1,-1/2)$$

① Lineære likningssystem

Et **lineært system** er et system av likninger der alle likningene er lineære.

Eks: $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$

2×2 = 2 likninger i 2 ukjente (x,y)

lineært

Eks: $\begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}$ } a,b,c,d,e,f er gitte tall.

2×2 lineært system (generelt)

Løsning:

(a) **Innsetting / substitusjon:**

$x+y=4 \Rightarrow y=\underline{4-x}$

$x-y=2$

$x-(4-x)=2$

$2x-4=2$

$2x=6$

$\underline{x=3}$ $\underline{y=1}$

Løsn: $(x,y)=\underline{\underline{(3,1)}}$

(b) **Eliminasjon:**

$$\begin{array}{r} x+y=4 \\ x-y=2 \\ \hline 2x\quad=6 \end{array}$$

$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ 2x\quad=6 \end{cases}$

$x=3$

$\underline{\underline{y=1}}$

BI

② Gauss-eliminasjon.

Eks:

$$\begin{aligned} x+y-2z&=0 \\ x+y \qquad &=0 \\ -2x \qquad +8z&=0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &y=-x \\ &8z=2x \Rightarrow z=x/4 \end{aligned}$$

$$\cancel{x}+(\cancel{-x}) - 2\cdot(x/4)=0$$

$$-x/2=0$$

$$x=0$$

$$y=0$$

$$z=0$$

$$\Downarrow$$

$$(x,y,z)=(0,0,0)$$

Vha Gauss:

$$\begin{aligned} \boxed{x}+y-2z&=0 \\ x+y \qquad &=0 \\ -2x \qquad +8z&=0 \end{aligned} \qquad \xrightarrow{\cdot(-1)} \quad -x-y+2z=0 \quad (+)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \boxed{x}+y-2z&=0 \\ 2z&=0 \\ -2x \qquad +8z&=0 \end{aligned} \qquad \xrightarrow{\cdot 2} \quad 2x+2y-4z=0 \quad (+)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} x+y-2z&=0 \\ 2z&=0 \\ 2y+4z&=0 \end{aligned} \quad \updownarrow \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x+y-2z&=0 \\ \cdot \quad 2y+4z&=0 \\ \cdot \quad \cdot \quad 2z&=0 \end{aligned}$$

$$x + y - 2z = 0$$
$$x + y \qquad = 0$$
$$-2x \qquad + 8z = 0$$

$$\rightarrow \;---\; \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x + y - 2z = 0 \\ \quad 2y + 4z = 0 \\ \qquad 2z = 0 \end{array}$$

<u>trappeform</u>

<u>Baklengs substitusjon:</u>

$2z = 0 \rightarrow \underline{z = 0}$

$2y + 4 \cdot 0 = 0 \rightarrow \underline{y = 0}$

$x + 0 - 2 \cdot 0 = 0 \rightarrow \underline{x = 0}$

<u>Løsning</u>: $(x, y, z) = \underline{\underline{(0,0,0)}}$

Lineært likningssystem: $m \times n$: $\begin{cases} m \text{ likninger} \\ n \text{ ukjente} \end{cases}$

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \ \ \vdots \\ \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots \qquad & \end{aligned}}$$

a_{ij}: koeff. foran x_j i likn. i

b_i: konstantledd i likn. i

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

koeffisientmatrisen til det lineære systemet

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

augmentert matrise til det lineære systemet

Elementære radoperasjoner:

1. Multiplisere en rad med $c \neq 0$ $\quad \cdot c$
2. Bytte om to rader $\quad \updownarrow$
3. Legge til et multippel av en rad til en annen rad. $\quad \cdot c$

Trappeform:

- Det første tallet ulik null i en rad kalles en ledende koeff.

Eks:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \xrightarrow{\cdot(-1)} -x - y - z = -1 \\ x - y + z &= 3 \\ x + 2y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \quad -1 \qquad (-1 \ -1 \ -1 \mid -1)$$

augmentert matrise

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \quad -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad 1/2 \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

trappeform

Baklengs substitusjon:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -2y &= 2 \\ 3z &= 3 \end{aligned}$$

$x = 1 - y - z = 1 - (-1) - 1 = 1$

$y = -1$

$z = 1$

Løsn: $(x, y, z) = (1, -1, 1)$

Trappeform:

En matrise er på trappeform hvis følgende betingelser er oppfylt:

① Alle null-rader er nederst i matrisen.

② Alle koeffisienter under en ledende koeffisient er null.

ledende koeffisienter i en trappeform: pivot-posisjoner

pivot-posisjoner

Eks:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{2} \quad \text{trappeform.} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

trappeform

Resultat:

⊛ Enhver matrise kan gjøres om til en trappeform ved hjelp av elementære radoperasjoner.

⊛ Trappeformen er ikke entydig. Pivot-posisjonene er entydige.

Eks:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

trappeform $\qquad$ trappeform

Eks:

$$x + y + z + w = 4$$
$$x + 2y - z = 7$$
$$x + y + 2z + 3w = 10$$

Gauss:

1. Skriv ned augm. matrise
2. Bruke elementære radop. for å gjøre om til trappeform.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1 \\ \\ -1 \end{array}$$

Start med første ledende koeff. Bruk denne til å få null i alle posisjoner under.

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$ trappeform

Gå videre til neste ledende koeff. Bruk denne til å få null i alle posisjoner under.

Fortsett på samme måte

3. Skriv ned systemet til trappeformen, og løs ved baklengs substitusjon.

$$x + y + z + w = 4$$
$$y - 2z - w = 3$$
$$z + 2w = 6$$

$z + 2w = 6 \Rightarrow z = \underline{6 - 2w}$

$y - 2z - w = 3 \Rightarrow y = 3 + 2z + w$

$= 3 + 2(6 - 2w) + w = \underline{15 - 3w}$

$x + y + z + w = 4 \Rightarrow x = 4 - y - z - w$

$= 4 - (15 - 3w) - (6 - 2w) - w$

$= \underline{-17 + 4w}$

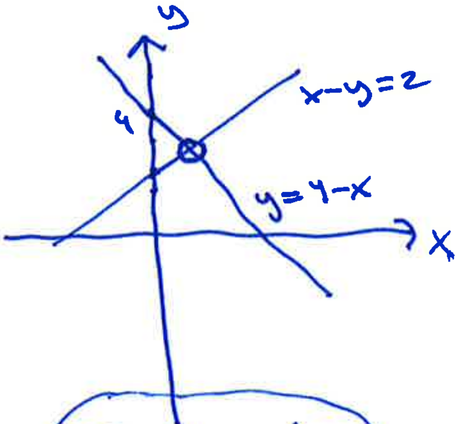
Løsn:

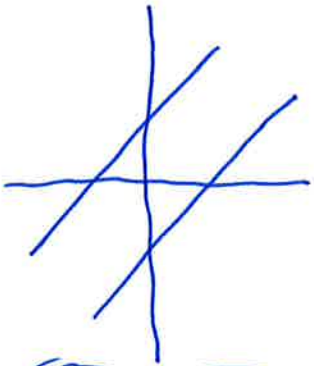
$$\left.\begin{array}{l} x = -17 + 4w \\ y = 15 - 3w \\ z = 6 - 2w \\ w = w \quad \text{(fri variabel)} \end{array}\right\}$$ uendelig mange løsninger.

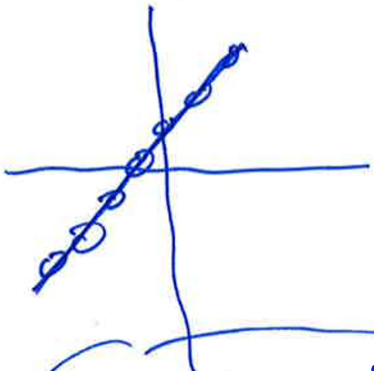
Mulige løsninger av lineære systemer:

Eks: 2×2 lineære system

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$







én løsning

$x + y = 4$
$x - y = 2$

$x+y=4$
$y = 4-x$

$x-y=2$
$x-2 = y$

ingen løsning

$x - y = 2$
$2x - 2y = 7$

$2x-2y=4$
$2x-2y=7$

uendelig mange løsn.

$x - y = 2$
$2x - 2y = 4$

$2x-2y=4$
$2x-2y=4$

Resultat: Alle lineære systemer (uansett størrelse) har enten

i) én løsning
ii) ingen løsninger
iii) uendelig mange løsninger