

FORELESNING 22

NET1180

BI

EIVIND ERIKSEN,

FEB 13, 2018

MATEMATIKK

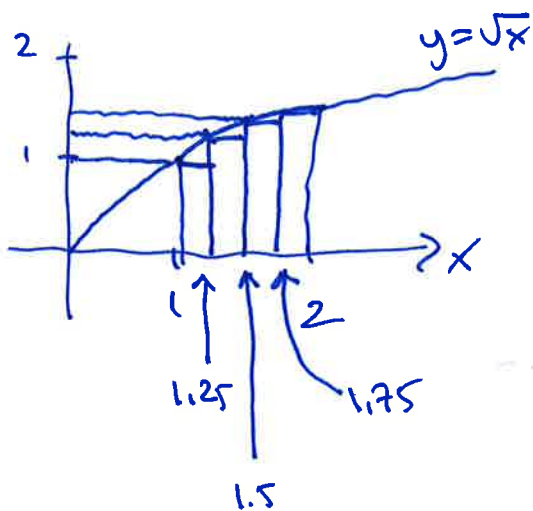
Plan:

- ① Lineære system og Gauss-eliminering
- ② Determinanter

Pensum:

[E] 6.3-6.4

Oppg. 5.6.3



Riemannsum:

$$\begin{aligned} & 0.25 \cdot \sqrt{1} + 0.25 \cdot \sqrt{1.25} \\ & + 0.25 \cdot \sqrt{1.5} + 0.25 \cdot \sqrt{1.75} \\ & \approx \underline{\underline{1.166}} \end{aligned}$$

Virkelig areal:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{x} \, dx &= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_1^2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 2^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) \\ &\approx \underline{\underline{1.219}} \end{aligned}$$

①

Gauss-eliminering

BI

Metode for å løse lineære likningssystem.

Ek: $x+y+z=6$
 $x+2y+4z=13$
 $x+3y+9z=24$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 13 \\ 1 & 3 & 9 & 24 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow -1 \\ \leftarrow -1 \end{array}$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑
 $x \quad y \quad z = \text{konst.}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 18 \end{array} \right) \leftarrow -2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{trappe-} \\ \text{form} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ y+3z &= 7 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

$$\underline{z=2} \quad \underline{y=1} \quad \underline{x=3}$$

En løsn: $(x, y, z) = \underline{(3, 1, 2)}$

Steg: (a) Skriv ned augm.
matrise til systemet

(b) Bruk elementære
radoperasjoner til
å gjøre om matrise
til en trappet form

(c) Skrive om matrise
til et lineært system,
og løse det ved
rekursiv substitusjon

Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow -3 \\ \leftarrow -1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \leftarrow -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \text{ redusert trappet form}$$

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Variante: Gauss-Jordan eliminasjon

BI

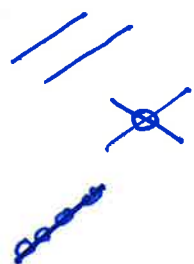
Vi fortsetter til vi finner en reduert trappelform, dvs en trappelform slik at

- ① Alle pivoter = ledende koef. er 1
- ② Alle koef. over en pivot-posisjon er 0.

Den reduserte trappelformen er entydig.

Løsninger av lineære system

Resultat:



Et lineært system har enten

- i) ingen løsninger
- ii) en løsning
- iii) uendelig mange løsninger

ikke mulig:



i) ingen løsninger

inkonsistent

ii) en løsn.

iii) uendelig mange løsn.

} konsistent

Ex:

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 4z = 13$$

$$x + 3y + 7z = 24$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 13 \\ 1 & 3 & 7 & 24 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 18 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - 2R_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

trappelform
ingen løsning

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 4 \\ 0 = 4$$

Resultat:

ingen løsning $\iff$ pivot-posisjon
(inkonsistent) i siste kolonne

BI

Eks:

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 4z = 13$$

$$x + 3y + 7z = 20$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 13 \\ 1 & 3 & 7 & 20 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \downarrow -1 \\ \downarrow -1 \end{array}$$

x, y : avhengige

z : fri

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 14 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \downarrow -2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ingen pivot-posisjon i siste

kolonne $\Rightarrow$ konsistent

en løsn. eller uendelig
mange løsn.

trappetform

en variabel kalles fri hvis den svarer til kolonne
uten pivot-pos.

— (— avhengig hvis den svarer til en
kolonne med pivot-pos.

Defn:

Antall frihetsgrader = antall frie variable
i et konsistent system

ingen frihetsgrader: en løsning

minst én frihetsgrad: uendelig mange løsn.

Exo:

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 4z = 13$$

$$x + 3y + 7z = 20$$



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

trappelform

konsistent
 z frei
 $\Downarrow$
 unendlich
 viele
 Lösn.



$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \rightarrow x = -1 + 2z \\ y + 3z &= 7 \rightarrow y = 7 - 3z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 6 - y - z \\ &= 6 - (7 - 3z) - z \\ &= \underline{-1 + 2z} \end{aligned}$$

Lösn:

$$x = -1 + 2z$$

$$y = 7 - 3z$$

$$z = z \quad (\underline{\underline{\text{frei}}})$$

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (-1 + 2z, 7 - 3z, z) \\ &= (-1 + 2z, 7 - 3z, z) \\ &\quad \text{da } \underline{z \text{ frei}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z=0: & \quad (-1, 7, 0) \\ z=1: & \quad (1, 4, 1) \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

Exo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

unendlich
 viele Lösn.

Oppg. 6.3.6

3x5 lin. system

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \odot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \odot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \odot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)$$

$x_4 x_5$

Uendelig mange løsn.
(to fri)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \odot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \odot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \odot & \odot & \odot & \odot & \odot & \odot \end{array} \right)$$

$x_2 \quad x_4 x_5$

Uendelig mange løsn
(tre fri)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{array} \right)$$

maks tre
pivot pos.

En løsn:

pivot pos i alle fem
variabel kolonner

Oppg. 6.3.4

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ -x + ay - 21z &= 2 \\ 3x + 7y + az &= b \end{aligned}$$

} a, b er parametre

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 3 & 1 \\ -1 & a & -21 & 2 \\ 3 & 7 & a & b \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \textcircled{1} \\ \leftarrow -3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a+2 & -18 & 3 \\ 0 & 1 & a-9 & b-3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \uparrow \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & a-9 & b-3 \\ 0 & a+2 & -18 & \text{---} 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow -(a+2) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & a-9 & b-3 \\ 0 & 0 & -a^2+7a & -ab+3a-2b+9 \end{array} \right)$$

$$-18 - (a+2) \cdot (a-9) = -18 - (a^2 - 7a - 18) = -a^2 + 7a$$

$$\begin{aligned} 3 - (a+2) \cdot (b-3) &= 3 - (ab - 3a + 2b - 6) \\ &= -ab + 3a - 2b + 9 \end{aligned}$$

en løsn: $-a^2 + 7a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0, a \neq 7$

ingen løsn:

$$\begin{aligned} &a=0 \text{ eller } a=7 \\ &b \neq 9/2 \quad b \neq 30/9 \end{aligned}$$

uendelig mange løsn:

$$(a=0, b=9/2) \text{ eller } (a=7, b=30/9)$$

$$-a^2 + 7a = 0$$

$$a(-a+7) = 0$$

$$\underline{a=0}, \underline{a=7}$$

$$\underline{a=0}: -2b+9$$

$$\underline{a=7}: -9b+30$$

Ex: $x + y = 4$

Alternativ:

$y = 4 - x$, x frei

Gauss:

$(1 \mid 1 \mid 4)$

unendlich viele Lsgn.

y ist frei

$x + y = 4$

$x = 4 - y$, y frei

② Determinanten

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$|A| = \det(A) = 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 3$

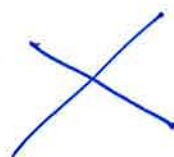
Formel:

2x2-
matrizen

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$|A| = a \cdot d - b \cdot c$
 $= ad - bc$

Ex: $3x - 7y = 17$
 $x + 4y = 5$



$|A| \neq 0$
 $\Uparrow$
ein Lsgn.

$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Kochl. Matrizen

$|A| = 3 \cdot 4 - 1 \cdot (-7) = 12 + 7 = 19$

Ex: $x + y = 4$
 $2x + 2y = 7$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = 2 - 2 = 0$

$|A| = \det(A)$ er definert når A er
en $n \times n$ -matrise, ←
og gir et tall
som svar.

n rader
 n kolonner,
dvs like
mange rader
som kolonner.
Kvadratisk
matrise

Beregning av determinant:

$n=2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \underline{ad - bc}$

$n=3$: Ek. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad |A| = ?$

Alternativ 1: Kofaktorutvikling

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Velger kofaktorutvikling
langs første rad.

$\rightarrow = +1 \cdot 6 - 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = \underline{\underline{2}}$

$|A| = 1 \cdot (+1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}}_{M_{11}} + 1 \cdot (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}}_{M_{12}} + 1 \cdot (+1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}_{M_{13}}$

$\begin{pmatrix} \oplus & + & + \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} + & \ominus & + \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} + & + & \oplus \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Førtegn:

$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

posisjon (i, j)
= rad i , kolonne j

$\{$
førtegn $(-1)^{i+j}$

M_{ij} = minor i posisjon (i, j)

= determinanten vi
får når vi stryker
rad i , kolonne j i A .

Fordeler med kofaktorutvikling:

- generell, kan brukes til å finne alle $n \times n$ -determinanter
- utviklings leys er hvilken som helst rad eller kolonne gir samme resultat;
lurt å velge rad/kolonne som enklest mulig regning.