FORELESNING 23

MET1180

MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN, FEB 14 2018

Plan:

1. Determinanter og lineære system
2. Cramer's regel
3. Matrise- og vektorregning

Pensum:

[E] 6.4 - 6.5

Merk: Ingen forelesning neste uke
Oppg.regning som vanlig
i dag + neste onsdag

Kontortid: I dag 11-14 + etter kl 17
I uke neste uke: Tors. etter kl 11, Fred.

---

1. Determinanter

En $m \times n$-matrise A er en rektangulær blokk med tall, med m rader, n kolonner $(m \times n)$

Den kalles kvadratisk hvis $m = n$.

A ($n \times n$-matrise (kvadratisk)) $\rightsquigarrow$ $\det(A) = |A|$ determinanten til A (et tall)

Formel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$\underline{n=2:}$ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\underline{n=3:}$ Metoder for å regne ut $\det(A)$:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{matrix} aei \\ +bfg \\ +cdh \\ -ceg \\ -afh \\ -bdi \end{matrix}$$

a) **Kofaktorutvikling:**

Velg en rad eller kolonne, og bruk kofaktorutvikling langs den valgte raden/kolonnen.

- generell
- gir samme svar uansett hvilken rad/kolonne man velger

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \left| * \right| - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

fortegn

$$= -3 \cdot (7 \cdot 4 - 4 \cdot (-1)) - 1 \cdot (1 \cdot (-1) - 7 \cdot 2)$$

$$= -3 \cdot 32 - 1 \cdot (-15) = -96 + 15 = \underline{\underline{-81}}$$

- fungerer kun for 3x3-matriser

b) **Kryssmultiplikasjon:**

$$\overbrace{0 \cdot (1 \cdot 4 - (-2) \cdot 4) + 1 \cdot (7 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)) + 3 \cdot (4 \cdot (-1) - 7 \cdot 4)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 7 \\ 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$$= 1 \cdot 0 \cdot 4 + 7 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot (-1)$$
$$- 2 \cdot 0 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 7 \cdot 3 \cdot 4$$

$$= 0 + 14 - 12 - 0 + 1 - 84 = \underline{\underline{-81}}$$

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

$$= (+2 \cdot 3) - \left(-1 \cdot (21+4) + 4 \cdot (3)\right)$$

$$= 6 + 25 - 12 = \underline{\underline{19}}$$

c) Determinant vha Gauss

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \to \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = |C| = \underline{\underline{2}} = |B| = +1 \cdot 2 = \underline{2}$$

$$|C| = +1 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{2}$$

Resultat: Dersom $A \to B$ er en elementær radoperasjon, så har vi:

i) $|B| = |A|$ hvis vi legger til et multippel av en rad til en annen rad

ii) $|B| = -|A|$ hvis vi bytter om to rader

iii) $|B| = c \cdot |A|$ hvis vi multipliserer en rad med $c \neq 0$

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{7} & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{-4/7} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 7\cdot 1 - 4\cdot(-3) = 7+12 = \underline{19}$$

$$\| $$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3/7 & 25/7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = +1 \cdot \left(+7 \left(-\frac{6}{7} + \frac{25}{7}\right)\right) = 1 \cdot 7 \cdot \left(\frac{19}{7}\right) = \underline{19}$$

Resultat: I en kvadratisk matrise på trappeform, er determinanten lik produktet av koeffisientene på diagonalen: $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots$

Eks:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 5 = \underline{\underline{35}}$$

$|A| \neq 0$ hvis vi har pivot-pos. i hver kolonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

$|A| = 0$ hvis det er kolonner uten pivot-pos.

Anvendelser: Determinant og Lineære Likningssystemer

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

$m \times n$ - lineært system

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

koeff. matrise $(m \times n)$

$$(A|\underline{b}) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

den utvidete (augmenterte) matrise

$m \times (n+1)$ - matrise

Bruk av determinant:

Anta at $m = n$ (antall likninger = antall ukjente)

Regn ut: $|A|$

$|A| \neq 0$: system har <u>én løsning</u>
(pivot-pos. i hver kolonne)

$|A| = 0$: systemet har $\left\{\begin{array}{l} \text{ingen løsninger} \\ \text{eller} \\ \text{uendelig mange løsn.} \end{array}\right.$

Eks:

$$x+y+z=4$$
$$x+2y+4z=7$$
$$x+3y+9z=h$$

3x3 lin. system med parameter h

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix} : \quad |A| = 1\cdot(18-12)-1\cdot(9-4)+1\cdot(3-2)$$
$$=6-5+1=\underline{\underline{2}}\neq 0$$
$$\Downarrow$$

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&4\\1&2&4&7\\1&3&9&h\end{array}\right)$$

<u>Én løsning</u> (for alle verdier av h)

Cramers regel:

Anta at $m=n$ og at $|A|\neq 0 \rightsquigarrow$ én løsning.

$$x = \frac{|A_1(\underline{b})|}{|A|} = \frac{2h-18}{2} = \underline{\underline{h-9}}$$

$$|A_1(\underline{b})| = \begin{vmatrix}4&1&1\\7&2&4\\h&3&9\end{vmatrix}$$
$$=4\cdot 6-1(63-4h)+1\cdot(21-2h)$$
$$=24-63+4h+21-2h$$

$$y = \frac{|A_2(\underline{b})|}{|A|} = \frac{-3h+36}{2} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}h+18}}$$

$$|A_2(\underline{b})| = \begin{vmatrix}1&4&1\\1&7&4\\1&h&9\end{vmatrix}$$
$$= \cancel{1\cdot 15+4}$$
$$+1(63-4h)-4\cdot 5+1(h-7)$$

$$z = \frac{|A_3(\underline{b})|}{|A|} = \frac{h-10}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}h-5}}$$

$$|A_3(\underline{b})| = \begin{vmatrix}1&1&4\\1&2&7\\1&3&h\end{vmatrix}$$
$$=1\cdot(2h-21)-1\cdot(h-7)+4\cdot 1$$

Konkl:

$$\underline{\underline{(x,y,z) = \left(h-9,\ -\frac{3}{2}h+18,\ \frac{1}{2}h-5\right)}}$$

Cramers regel:

Brukes når vi har lineære system med parametre

Et lineært system i n variable $x_1 \dots x_n$ og n likninger, med koeff. matrise A slik at $|A| \neq 0$.

Da har systemet én løsning gitt ved:

$$x_1 = \frac{|A_1(\underline{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\underline{b})|}{|A|} \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n(\underline{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\underline{b})$ er matrisen vi får når vi bytter ut kolonne i fra A med $\underline{b}$ = den siste kolonnen i den utvidede matrisen.

Eks:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ x-y+z &= 1 \\ x+3y+az &= 5 \end{aligned}$$

3x3 lineært system med parameter $\underline{a}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix} \qquad (A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & a & 5 \end{array}\right)$$

$$|A| = 1\cdot(-a-3) - 1\cdot(a-1) + 1\cdot 4 = \underline{-2a+2}$$

$\underline{|A|=0}$:
$$-2a+2=0$$
$$2=2a$$
$$\underline{a=1}$$

Cramer's regel

$a \neq 1$ $|A| \neq 0$: én løsning

Gauss

$a=1$ $|A|=0$: ingen løsning eller uendelig mange løsn.

$\underline{a=1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) +1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

uendelig mange løsn.
z fri

$x = 3-1-z = 2-z$
$y=1$

$$(x,y,z) = \underline{\underline{(2-z,1,z)}}$$

$a \neq 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix} \qquad (A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & a & 5 \end{array}\right)$$

$|A| = -2a+2 \neq 0$ én løsning.

$$x = \frac{|A_1(\underline{b})|}{|A|} = \frac{-4a+4}{-2a+2} = \frac{-4\cancel{(a-1)}}{-2\cancel{(a-1)}} = \underline{\underline{2}}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & a \end{vmatrix} = 3\cdot(-a-3) - 1\cdot(a-5) + 1\cdot(3+5) = \underline{-4a+4}$$

$$y = \frac{|A_2(\underline{b})|}{|A|} = \frac{-2a+2}{-2a+2} = \underline{\underline{1}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & a \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 1\cdot(a-5) \\ -3(a-1) \\ +1\cdot(4) \end{array} = -2a+2$$

$$z = \frac{|A_3(\underline{b})|}{|A|} = \frac{0}{-2a+2} = \underline{\underline{0}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 1\cdot(-8) \\ -1\cdot 4 \\ +3\cdot 4 \end{array} = 0$$

Konkl: $(x,y,z) = \underline{\underline{(2,1,0)}}$ for alle $a \neq 1$

Regneregler for determinanter:

* $\underline{\det(A) = 0}$ hvis A har to like rader eller to like kolonner

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot(-1) \qquad |A| = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -7 \end{pmatrix} \qquad |A| = 0$$

* $\underline{\det(A^T) = \det(A)}$

A^T = den transponerte av A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

A^T fremkommer ved at rader gjøres om til kolonner, dvs vi <u>speiler</u> matrisen om <u>diagonalen</u>.