FORELESNING 24

MET 11 80

BI

EIVIND ERIKSEN

FEB 28, 2015

MATEMATIKK

Plan:

1. Matrise- og vektorregning
2. Lineære system på matriseform
3. Inverse matriser

Husk: * Kontrollprøve (korte-kurs for de som ikke fikk den bestått i høst)

* Innlevering (frivillig): Kap 5-6.

1. Matrise- og vektorregning

En $m \times n$-matrise A har m rader og n kolonner

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En m-vektor er en $m \times 1$-matrise ($n=1$ kolonne)

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

Regneoperasjoner:

i) Addisjon / subtraksjon:

$A+B$, $A-B$ hvis A, B er matriser av samme størrelse

Eks:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & 7+(-3) \\ & \shortparallel \end{array} \\ \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}}$$

opererer posisjon for posisjon

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}}}$$

tilsvarende for vektorer (spesialtilfelle)

ii) Skalarmultiplikasjon:

skalar = tall

Eks:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 3\cdot 4 & \\ & \shortparallel & \end{array} \\ \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}}} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot 2 = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}}$$

opererer posisjon for posisjon

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}}}$$

tilsvarende for vektorer (spesialtilfelle)

iii) **Matrisemultiplikasjon:** $A \cdot B$

multiplikasjon av to matriser

Eks:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 3+2\cdot(-1) & 1\cdot 4+2\cdot 2 \\ 0\cdot 1+(-1)\cdot 0 & 0\cdot 3+(-1)\cdot(-1) & 0\cdot 4+(-1)\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Merk: $A \cdot B$ er definert hvis $\boxed{\# \text{ kolonner i } A = \# \text{ rader i } B}$

$$\underset{m \times n}{A} \quad \underset{n \times p}{B} \rightsquigarrow \underset{m \times p}{AB}$$

Eks:

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \overset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AB$$

$2 \times \boxed{2 = 2} \times 2$

$\neq$

$$B \cdot A = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA$$

Merk: $\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$

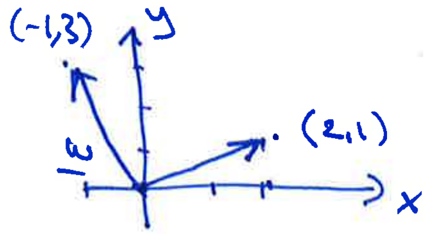
Eks: Regn ut

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}}}$$

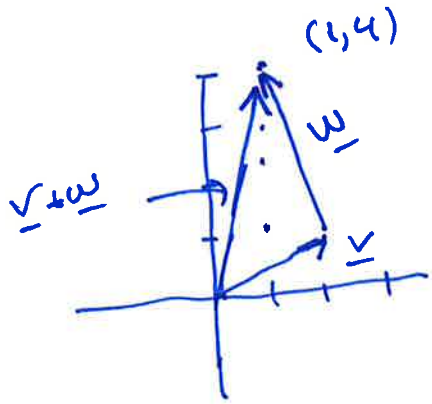
Representasjon av vektorer:

2-vektorer: $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(forflytning)



$\underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$



$$\underline{v} + \underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \leftarrow$$

en vektor representerer et datasett med N datapunkter

② Lineære system på matriseform

$$\begin{aligned} x - y + z + w &= 4 \\ x + y - z \phantom{{}+w} &= 7 \\ x \phantom{{}+y} + z - 4w &= 10 \end{aligned}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

konstant-vektoren til systemet

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

koeff.matrisen til systemet

(3×4-matrise)

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

variabel-vektoren til systemet.

4-vektor

$$A \cdot \underline{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}}_{3\times 4} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}}_{4\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}}_{3\times 1}$$

$$= \begin{pmatrix} x - y + z + w \\ x + y - z \\ x + z - 4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \underline{b}$$

Ethvert lineært likningssystem kan skrives på matriseform som $\boxed{A \cdot \underline{x} = \underline{b}}$, der A er koeff. matrisen, $\underline{x}$ er variabel-vektoren og $\underline{b}$ er konstantvektoren til systemet.

Lineært system på matriseform:

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ $\qquad$ ~~$x = b/A$~~

$2x = 3$

$x = 3/2$

hva med matriser?

4) Inverse matriser:

A $n \times n$-matrise: (kvadratisk)

Vi sier at B er en invers til A hvis

$$A \cdot B = I$$

$$B \cdot A = I$$

$2 \neq 0$

$2^{-1} = \frac{1}{2}$ invers

$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Identitetsmatrisen:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

vi skriver ofte I for $I_2, I_3, \ldots$

Eks:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Merk: For enhver (kvadratisk) matrise A, så er $A \cdot I = A$ og $I \cdot A = A$.

Eks:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: Finn invers til A?
Hva er isåfall den inverse matrisen?

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ den inverse fins

$B \cdot A = B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Formel: $(n=2)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

① Den inverse til A fins hvis $|A| \neq 0$
(og bare hvis)

② Hvis $|A| \neq 0$, så er den inverse matrisen $A^{-1} = B$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Sjekk:

$$\underset{\overset{\shortparallel}{A}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{\overset{\shortparallel}{I}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Defn: En $n\times n$-matrise A er invertibel hvis det fins en matrise B slik at

$$A\cdot B = I \quad \text{og} \quad B\cdot A = I$$

I så fall, så er den inverse matrisen entydig og skrives $A^{-1} = B$.

Resultat: i) A er invertibel $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$
(A^{-1} fins)

ii) Hvis $|A| \neq 0$, så er

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{|A|}\cdot \operatorname{adj}(A)$$

Eks: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

$$|A| = 1\cdot \underbrace{(+1)\cdot(18-12)}_{C_{11}} + 1\cdot \overbrace{(-1)\cdot(9-4)}^{C_{12}} + 1\cdot \underbrace{(+1)\cdot(3-2)}_{C_{13}}$$

$$= 1\cdot 6 + 1\cdot(-5) + 1\cdot 1 = 2 \neq 0$$

$\Downarrow$

A^{-1} fins: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{2}\cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^T$

$$\left.\begin{array}{lll} C_{11} = 6 & C_{12} = -5 & C_{13} = 1 \\ C_{21} = -6 & C_{22} = 8 & C_{23} = -2 \\ C_{31} = 2 & C_{32} = -3 & C_{33} = 1 \end{array}\right\} \quad \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -5/2 & 4 & -3/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Eks:

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 12 \\
x + 2y + 4z &= 17 \\
x + 3y + 9z &= 7
\end{aligned}
$$

$$
\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\underline{x}}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underset{\underline{b}}{\begin{pmatrix} 12 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}}
$$

Matriseform: $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

$$
A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}
$$

multipliser med A^{-1} fra venstre:

$$
\begin{aligned}
A^{-1} \cdot A\underline{x} &= A^{-1} \cdot \underline{b} \\
(A^{-1} A)\underline{x} &= A^{-1} \cdot \underline{b} \\
I \cdot \underline{x} &= A^{-1} \cdot \underline{b} \\
\underline{x} &= A^{-1} \cdot \underline{b} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\cancel{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 44 \\ 136 - 66 - 21 \\ 12 - 34 + 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 44 \\ 55 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 55/2 \\ -15/2 \end{pmatrix}}
$$

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \cdot 12 - 6 \cdot 17 + 2 \cdot 7 \\ -5 \cdot 12 + 8 \cdot 17 - 3 \cdot 7 \\ 1 \cdot 12 - 2 \cdot 17 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -16 \\ 55 \\ -15 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -8 \\ 55/2 \\ -15/2 \end{pmatrix}}}
$$