Forelesning 27

MET 1180 BI

Matematikk

Eivind Eriksen, Mar 14 2018

Plan:

1. Partiell-derivasjon
2. Hesse-matriser (neste gang)
3. Lokale maks/min

Pensum:

[E] 7.2–7.4

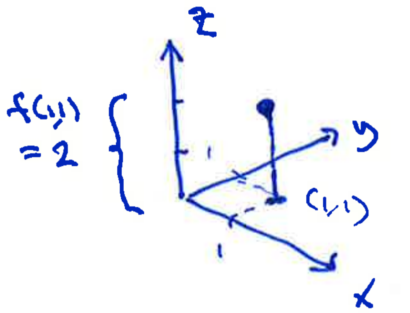
Eks: $f(x,y) = x^2+y^2$

$\downarrow$ grafen til f

$z = f(x,y)$

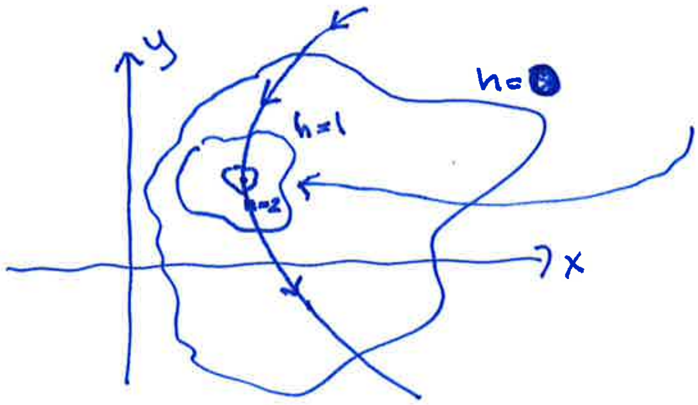
for alle (x,y)

i D_f = def. mengde til f.



Eks: $f(1,1) = 1^2+1^2 = 2$

Nivåkurver: $f(x,y) = h$ der h er en konstant.



alle pkt (x,y) slik at grafen til f har høyde $h=1$

Oppg. 7.1.3 b)

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad xy \neq 0$$

Nivåkurver:

$h=0$, $h=1$, $h=2$

h=0:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{x \cdot x}{y \cdot x} + \frac{y \cdot y}{x \cdot y} = 0$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy} = 0$$

$x^2+y^2=0$ $(x,y)=(0,0)$ gir null i nevner.

dvs: ingen plot for $h=0$

h=1:

$$\frac{x^2+y^2}{xy} = 1 \quad | \cdot xy$$

$$\boxed{x^2+y^2 = xy}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 0 \quad \leftarrow$$

ønsker å løse for y

$y = \ldots$ (uttrykk i x)

$$y^2 - x \cdot y + x^2 = 0$$

$a=1$ $b=-x$ $c=x^2$

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4 \cdot 1 \cdot x^2}}{2 \cdot 1}$$

$$y = \frac{x \pm \sqrt{-3x^2}}{2}$$

kun løsn. hvis $x=0$

~~Løsn: (0,0)~~

ingen løsn.

$\underline{n=2}$: $\quad \dfrac{x^2+y^2}{xy} = 2 \quad | \cdot xy$

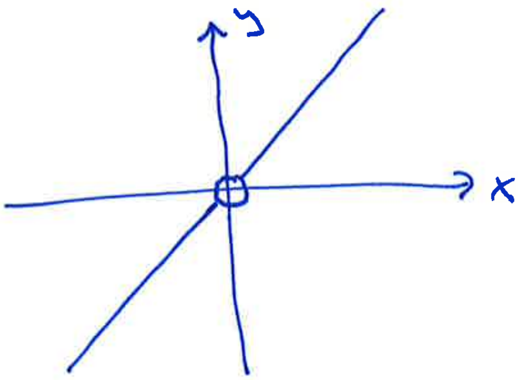
$$x^2+y^2 = 2xy$$

$$x^2-2xy+y^2=0$$

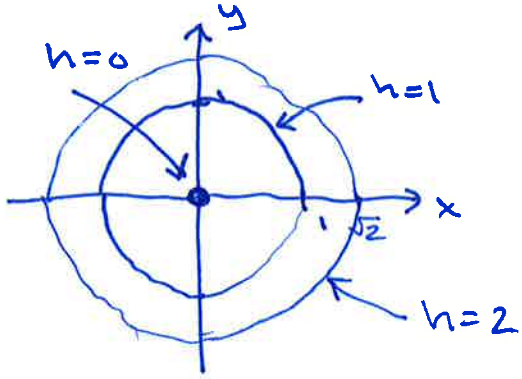
$$y^2-2x\cdot y+x^2=0 \Rightarrow y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2-4\cdot 1\cdot x^2}}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{2x \pm 0}{2}$$

$$y = x \quad , x \neq 0$$



Eks: $f(x,y) = x^2 + y^2$



h = −1: $f(x,y) = x^2+y^2 = -1$

ingen pkt.

h=0: $x^2+y^2 = 0$

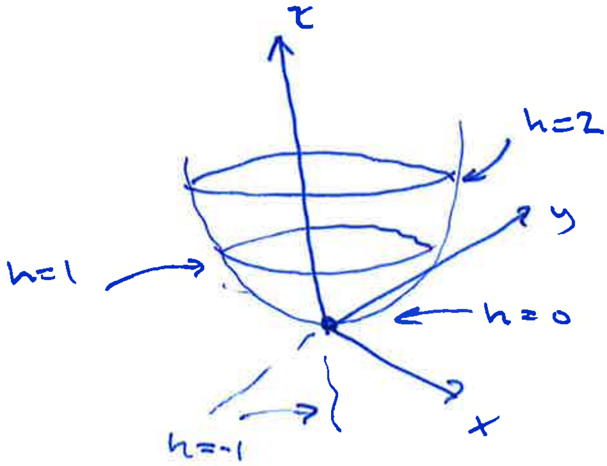
$(x,y)=(0,0)$

h=1: $x^2+y^2=1$ $\quad y^2=1-x^2$

sirkel, $\quad y = \pm\sqrt{1-x^2}$

radius 1

senter i (0,0)



h=2: $x^2+y^2=2$

sirkel

radius $\sqrt{2} \simeq 1,4$

senter i (0,0)

Repetisjon:

① **Sirkler:** $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

likning for en sirkel med radius r

og senter i (x_0,y_0)

Eks: Oppg. 7.2.2 i [E]

a) $f(x,y) = x^2+5y^2$

Nivåkurver:

h=−1: $x^2+5y^2=-1$ ingen pkt.

h=0: $x^2+5y^2=0$ $\quad (x,y)=(0,0)$

h=1: $x^2+5y^2=1$ ellipse

$x^2+y^2+ax+by=c$

sirkel

$ax^2+by^2+cx+dy=e$

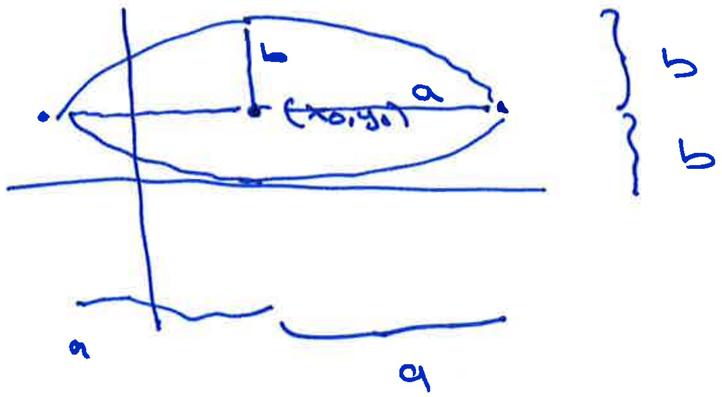
der $a,b>0$, $a\neq b$

ellipse

② Ellipse:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Ellipse med senter i (x_0, y_0) og med halvakser a og b.



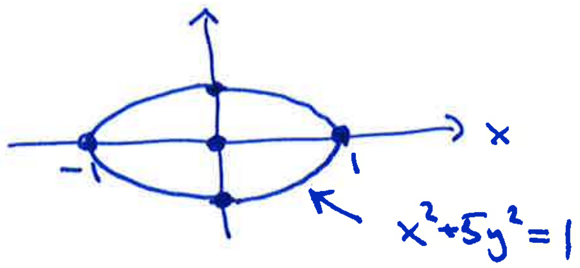
$$x^2 + 5y^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1/5} = 1 \quad \leftarrow$$

$(x_0, y_0) = (0,0)$: senter i origo

Halvakser: $a = 1$ $\quad b = \sqrt{1/5}$

$$\frac{y^2}{\left(\sqrt{1/5}\right)^2}$$



Hvis vi vet at det er en ellipse med senter $(0,0)$:

$y = 0$: $\quad x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = 0$: $\quad 5y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1/5$

$$y = \pm\sqrt{1/5}$$

b) $f(x,y) = 6x^2 - 10xy + 5y^2$

$\underline{h=-1:}$ $\quad 6x^2 - 10xy + 5y^2 = -1$

$\cancel{6x^2}$

$6x^2 - 10xy + 5y^2 = -1$

$$5y^2 - 10xy + \ldots = -1 - 6x^2$$

$$5(y^2 - 2xy + x^2) = -1 - 6x^2 + 5x^2$$

$$5(y-x)^2 = -1 - x^2$$

$f(x,y) = 5(y-x)^2 + x^2 = -1$ $\quad$ i $\underline{\text{ingen pkt.}}$

$\underline{h=0:}$ $\quad f(x,y) = 5(y-x)^2 + x^2 = 0$

$y - x = 0$ og $x = 0$ $\qquad$ $(x,y) = \underline{(0,0)}$

$\underline{h=1:}$ $\quad f(x,y) = 5(y-x)^2 + x^2 = 1$

$0 \le x^2 \le 1$

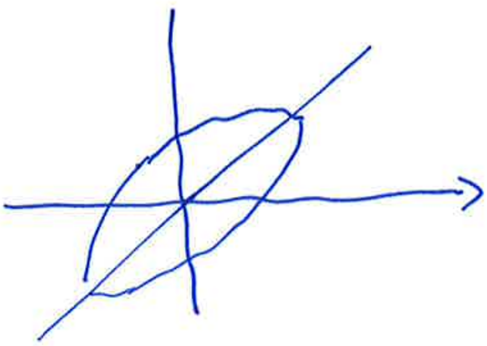
$-1 \le x \le 1$:

$$5(y-x)^2 = 1 - x^2$$

$$(y-x)^2 = \frac{1-x^2}{5}$$

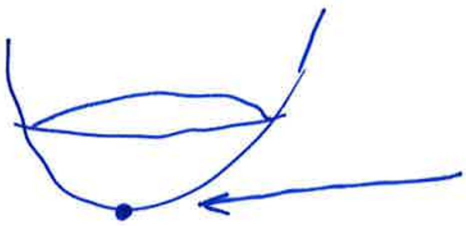
$$y - x = \pm\sqrt{\frac{1-x^2}{5}}$$

$$y = x \pm \sqrt{\frac{1-x^2}{5}}, \quad -1 \le x \le 1$$



$$f(x,y) = 6x^2 - 10xy + 5y^2$$
$$= 5(y-x)^2 + x^2 \quad = h$$

Konklusjon: Bunnpkt / min. : $(0,0)$: $f(0,0) = 0$



bunnpkt / min.

① Partiell derivasjon:

Eks: $f(x,y) = 6x^2 - 10xy + 5y^2$

$$\boxed{\begin{aligned} f'_x &= f'_x(x,y) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \\ f'_y &= f'_y(x,y) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \end{aligned}}$$

$$f'_x = 12x - 10\cdot y + 0$$
$$= \underline{12x - 10y}$$

deriverer med hensyn til x, tenker på y som en konst.

$$f'_y = 0 - x\cdot 10 + 10y$$
$$= \underline{-10x + 10y}$$

deriverer med hensyn til y, og tenker på x som en konstant

$y = 2$:

$f = 6x^2 - 10x\cdot 2 + 5\cdot 2^2$

$f' = \underline{12x - 10\cdot 2}$

Eks: $f(x,y) = x/y$ $\quad \begin{cases} y=2: & x/2 \\ x=2: & 2/y \end{cases}$

$$f'_x = \left(x \cdot \frac{1}{y}\right)'_x = \frac{1}{y} \cdot 1 = \underline{\underline{1/y}}$$

$$f'_y = \left(x \cdot \frac{1}{y}\right)'_y = x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)'_y = x \cdot (-1) \cdot y^{-2}$$

$$\frac{1}{y} = y^{-1}$$

$$= -\underline{\underline{\frac{x}{y^2}}}$$

Eks: $f(x,y) = \underline{\ln(x^2+y^2+1) = \ln(u)}$, der $\underline{u = x^2+y^2+1}$

$$f'_x = \underline{\frac{2x}{x^2+y^2+1}} \leftarrow \frac{1}{u} \cdot u'_x = \frac{1}{x^2+y^2+1} \cdot (2x)$$

$$f'_y = \frac{1}{u} \cdot u'_y = \frac{1}{x^2+y^2+1} \cdot 2y = \underline{\frac{2y}{x^2+y^2+1}}$$

Generelt: f'_x, f'_y er funksjoner i (x,y)

$f'_x = f'_x(x,y)$, $\quad f'_y = f'_y(x,y)$

Tolkning:

Eks: $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$

$$f'_x = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$$

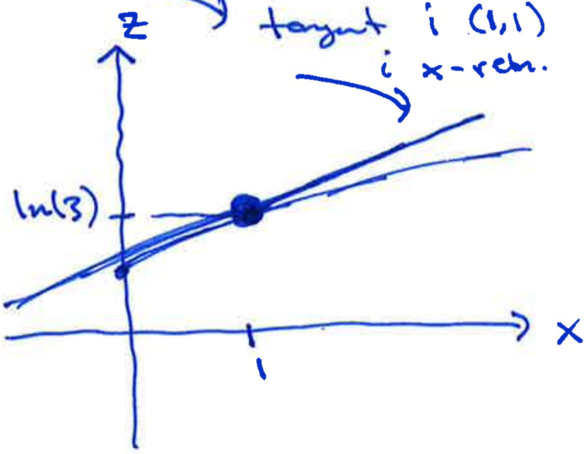
$$f'_x(1,1) = \frac{2 \cdot 1}{1+1+1} = 2/3$$

Eks: $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$ i $(1,1)$

$f'_x(1,1) = \underline{2/3}$ ← f'_x : x varierer, y konst. $y=1$

tangenten har stign. tall $= \underline{\underline{2/3}}$

tangent i $(1,1)$ i x-retn.

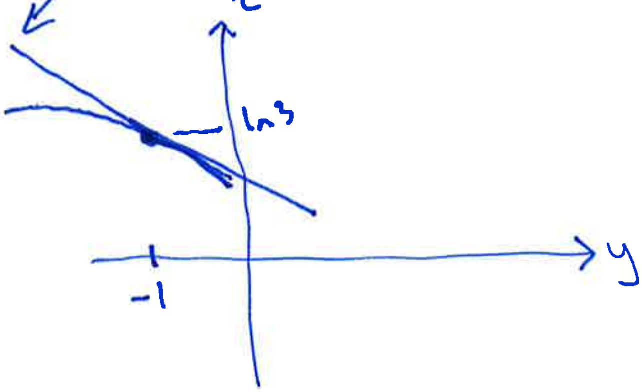


Dersom vi starter i $(x,y)=(1,1)$ og endrer x litt (men y er konstant $y=1$), så vil funksjonsverdien $f(x,y)$ endre seg med $2/3$ per enhet endring i x.

$$z = f(x,1) = \ln(x^2+2)$$

$f'_y(1,-1) = \frac{-2}{3} = \underline{-2/3}$ $\qquad f'_y = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$

Stign. tall til tangenten $= -2/3$



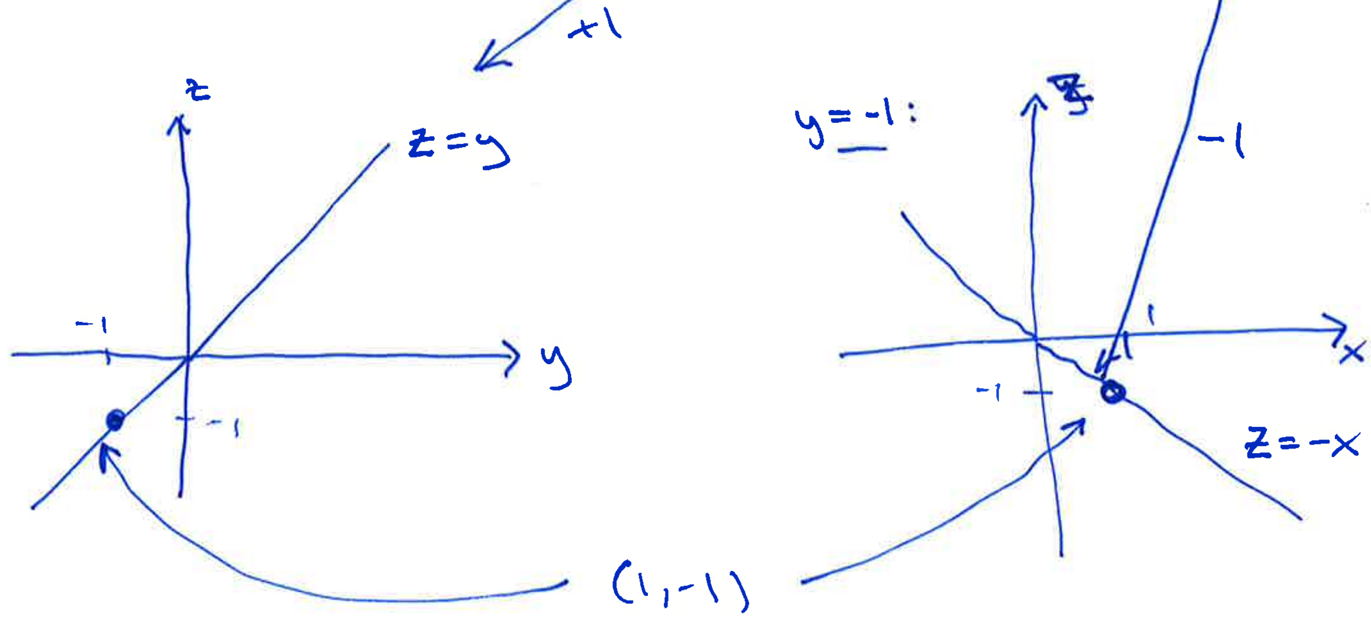
$$z = f(1,y) = \ln(y^2+2)$$

Eks: $f(x,y) = xy$ i $(1,-1)$

$f'_x = y$ $\qquad \boxed{f'_x(1,-1) = -1}$

$f'_y = x$ $\qquad \boxed{f'_y(1,-1) = 1}$

$x=1$:



Oppsummering: ⊛ For en funksjon $f(x,y)$, kan vi regne ut

f'_x og f'_y

(første ordens partiell deriverte)

⊛ For hvert pkt (a,b), så gir

$f'_x(a,b)$ og $f'_y(a,b)$

som kan tolkes som stigningstall til tangenter.

Defn:

Et stasjonært pkt (kritisk pkt) for f er et pkt. slik at

$$\boxed{f'_x = f'_y = 0} \leftarrow$$

førsteordens-betingelsene (FOC)

Eks: $f(x,y) = xy$

$f'_x = \underline{y = 0}$

$f'_y = \underline{x = 0}$

Løsn: $(x,y) = (0,0)$

$\uparrow$

Stasjonære pkt for $f = xy$.

Eks: $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - x + y + 7$

$f'_x = 2x - 3y - 1 = 0$

$f'_y = -3x + 4y + 1 = 0$

to likn. i to ukjente

$$2x - 3y = 1$$
$$-3x + 4y = -1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{3/2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ -\frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$\underline{y = -1}$

$\frac{2x}{2} = \frac{1-3}{2}$

$\underline{x = -1}$

Stasj. pkt:

$\underline{\underline{(-1,-1)}}$

$\boxed{\text{Hvis } f \text{ har et lokalt maks/min, så er det et stasjonært pkt.}}$

lokalt maks/min $\Longrightarrow$ stasjonært pkt.

Dette betyr at <u>stasjonære pkt</u> = <u>kandidater</u> for <u>maks/min</u>