

MAR 21, 2018

Plan:

- ① Hesse-matrisen og andrederivert-testen
- ② Globale maks/min-problemer
- ③ Nivåkurver og tangenter
- ④ Linearisering

Pensum:

[E] 7.3-7.5

Rakk ikke dette ([E] 7.5) i dag, gjennomgår neste gang.

* Kontrollprøve: Frist fredag.

* Innleveringsoppgave.

* Eksemenssett I: Se forelesningsplanen under neste seminargruppe.

Repetisjon:

maks/min $f(x,y)$ (uten bibetingelser)

* finner stasjonære pkt:

$$\left. \begin{array}{l} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{array} \right\} \text{førsteordrs-} \\ \text{betingelser}$$

Konklusjon Se (avgb):

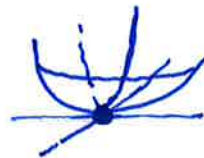
Stasjonære pkt er kandidater for maks./min.

Resultat:

(x,y) er max/min

$\Downarrow$

(x,y) er stasjonært pkt.



forutsatt at f ikke
er randpkt eller pkt.
der f'_x, f'_y ikke finnes

Opps. 7.3.2.

b) $f(x,y) = \ln(xy+1) = \ln(u)$, $u = xy+1$

$$f'_x = \frac{1}{u} \cdot u'_x = \frac{1}{xy+1} \cdot y = \underline{\underline{\frac{y}{xy+1}}}$$

$$f'_y = \frac{1}{u} \cdot u'_y = \frac{1}{xy+1} \cdot x = \underline{\underline{\frac{x}{xy+1}}}$$

c) $f(x,y) = x^2 e^x - e^{xy}$

$$e^{xy} = e^u, u = xy$$

$$f'_x = (2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x) - e^{xy} \cdot y$$

$$= \underline{\underline{(2x+x^2)e^x - ye^{xy}}}$$

$$f'_y = -e^{xy} \cdot x = \underline{\underline{-xe^{xy}}}$$

Stasjonære pkt i c):

$$f'_x = (2x+x^2)e^x - ye^{xy} = 0$$

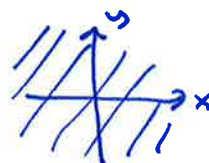
$$-y \cdot e^0 = 0 \quad \underline{y=0}$$

$$f'_y = -xe^{xy} = 0 \Rightarrow \underline{x=0}$$

$$\underline{\text{Stasjonære pkt: } (x,y) = (0,0)}$$

kandidater
for maks/min.

$$f(x,y) = x^2 e^x - e^{xy}$$

 $D_f =$ alle pkt $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$
ingen randpkt f'_x, f'_y eksisterer i alle
pkt (x,y)

① Hesse-matrisen og andrøderivert-testen

Anta at vi har funnet alle stasjonære pkt for $f(x,y)$. Neste steg er å klassifisere pktene som

- ① lokalt maksimum
- ② lokalt minimum
- ③ sadelpkt



Defn:

Et stasjonært pkt (x^*, y^*) er et lokalt maksimum hvis $f(x^*, y^*) \geq f(x, y)$ for alle pkt (x, y) i nærheten av (x^*, y^*) , og lokalt minimum hvis $f(x^*, y^*) \leq f(x, y)$ for alle pkt (x, y) i nærheten av (x^*, y^*) .

"pkt med størst/minst verdi blant pkt. i nærheten"

Et sadelpkt. er et stasjonært pkt som hverken er lokalt maks/min.

Hesse-matrisen: $f(x,y)$

Første ordens partiell-deriverte	Andre ordens partiell-deriverte
$\begin{cases} f'_x \\ f'_y \end{cases}$	$\begin{cases} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{cases}$

$$H(f) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} \quad \text{Hesse-matrisen til } f$$

Ex: $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\left. \begin{array}{lll} f'_x = 2x & f''_{xx} = 2 & f''_{xy} = 0 \\ f'_y = 2y & f''_{yx} = 0 & f''_{yy} = 2 \end{array} \right\} H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exs: $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

$$\left. \begin{array}{lll} f'_x = 3x^2 - 3y & f''_{xx} = 6x & f''_{xy} = -3 \\ f'_y = -3x + 3y^2 & f''_{yx} = -3 & f''_{yy} = 6y \end{array} \right\} H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

Merke: * $H(f)$ er en 2×2 -matrise av andrerangs i (x,y)
 * For alle varierte funksjoner f , så er $f''_{xy} = f''_{yx}$,
 dvs $H(f)$ er symmetrisk matrise.
 $(H(f))^T = H(f)$.

Eg: $f(x,y) = \ln(xy+1)$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'_x = \frac{y}{xy+1}$$

$$f''_{xx} = \left(\frac{y}{xy+1}\right)'_x = \frac{0 \cdot (xy+1) - y \cdot y}{(xy+1)^2}$$

$$f'_y = \frac{x}{xy+1}$$

$$\begin{aligned} f''_{xy} &= \left(\frac{y}{xy+1}\right)'_y = \frac{-y^2}{(xy+1)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (xy+1) - y \cdot x}{(xy+1)^2} \\ &= \frac{xy+1 - xy}{(xy+1)^2} = \frac{1}{(xy+1)^2} \end{aligned}$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{-y^2}{(xy+1)^2} & \frac{1}{(xy+1)^2} \\ \frac{1}{(xy+1)^2} & \frac{-x^2}{(xy+1)^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f''_{yy} &= \left(\frac{x}{xy+1}\right)'_y = \frac{0 - x \cdot x}{(xy+1)^2} \\ &= \frac{-x^2}{(xy+1)^2} \end{aligned}$$

Ek: en variabel

$$f(x) = 1 - x^2 e^x$$

$$f'(x) = -(2x e^x + x^2 \cdot e^x)$$

$$= -2x e^x - x^2 e^x = 0$$

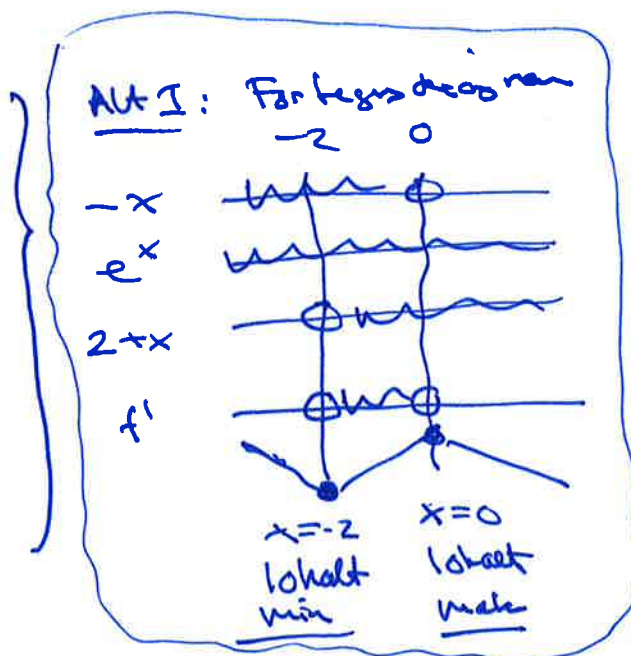
$$= -x e^x (2+x) = 0$$

$$\underline{x=0} \text{ eller } \underline{x=-2}$$

$$f''(x) = \left((-2x - x^2) e^x \right)'$$

$$= (-2 - 2x) e^x + (-2x - x^2) e^x$$

$$= \underline{e^x \cdot (-2 - 4x - x^2)}$$



kan ikke
brukes
for to
variable

Alt 2: Andrederivert-testen

$$\underline{x=-2}: f''(-2) = 2 \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2} > 0$$

$$\Rightarrow x=-2 \text{ lokal min}$$

$$\underline{x=0}: f''(0) = -2 \cdot e^0 = -2 < 0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ lokal maks.}$$

↑
metoden kan utvides til
funksjoner i to variable,
andrederivert-testen i to var

Hush:

$$f''(x^*) > 0 :$$



$$f''(x^*) < 0 :$$



$$f''(x^*) = 0 : \text{ingen konklusjon}$$

Andrederivert-testen:

Anta at (x^*, y^*) er et stasjonært pkt for $f(x, y)$
og at

$$H(f)(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

dvs: $A = f''_{xx}(x^*, y^*)$
 $B = f''_{xy}(x^*, y^*)$
 $C = f''_{yy}(x^*, y^*)$

Da har vi:

① Hvis $\det H(f)(x^*, y^*) = AC - B^2 < 0$, så er (x^*, y^*) et sadelpkt.

② Hvis $\det H(f)(x^*, y^*) = AC - B^2 > 0$, så har vi:

$A > 0$: (x^*, y^*) er et lokalt min.
 $A < 0$: (x^*, y^*) er et lokalt max.

③ Hvis $\det H(f)(x^*, y^*) = AC - B^2 = 0$, så sier testen ingenting.

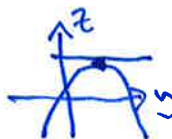
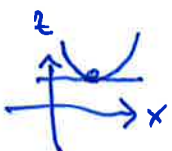
Merk:

$$\begin{aligned} AC - B^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow AC &> B^2 \geq 0 \\ \Downarrow \\ AC &> 0 \end{aligned}$$

→ dvs

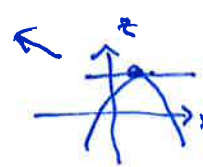
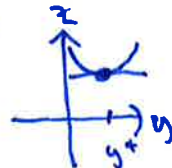
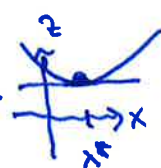
$$\begin{aligned} A &= f''_{xx}(x^*, y^*) \\ C &= f''_{yy}(x^*, y^*) \end{aligned}$$

$A > 0, C > 0$
 eller
 $A < 0, C < 0$



$$AC - B^2 < 0$$

kan vi
 $A > 0, C < 0$



Metode for å klassifisere stasjonære pkt

Ek: $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

$$\begin{aligned} f'_x &= 3x^2 - 3y = 0 \rightarrow \frac{3y}{3} = \frac{3x^2}{3} \rightarrow \underline{y = x^2} \\ f'_y &= -3x + 3y^2 = 0 \end{aligned}$$

Stasj. pkt:

$(x,y) = \underline{(0,0), (1,1)}$

↑
kandidater for
maks/min.

$$\begin{aligned} &\rightarrow -3x + 3y^2 = 0 \\ &-3x + 3 \cdot (x^2)^2 = 0 \\ &-3x + 3x^4 = 0 \\ &3x(-1 + x^3) = 0 \\ &x = 0 \text{ eller } x^3 = 1 \\ &\quad \quad \quad x = \sqrt[3]{1} = 1 \\ &\underline{x=0} \text{ eller } \underline{x=1} \\ &\underline{y=0} \quad \quad \quad \underline{y=1} \end{aligned}$$

Klassifikasjon av $(0,0), (1,1)$:

a) $(x,y) = (0,0)$: $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

Ser på:

$$\begin{aligned} \det H(f)(0,0) &= AC - B^2 \\ &= 0 - 9 = -9 \end{aligned}$$

$$\det H(f)(0,0) = -9 < 0$$

∴ $(0,0)$ er et sadelpkt
for andrerivert-testen

b) $(x,y) = (1,1)$:

$$H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} \textcircled{6} & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$$\det H(f)(1,1) = 36 - 9 = 27 > 0$$

$A = 6 > 0$: $(1,1)$ er lokalt min
ved andrerivert-testen

Ex: $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

(a) Stasjonære pkt:

$$(x,y) = (0,0), (1,1)$$

(b) Klassifisere stasjonære pkt:

$(0,0)$ er sadelpkt

$(1,1)$ er lokalt min

(c) Undersøke globale maks/min.

Ingen globale maks

Globale min: $(1,1)$ er eneste kandidat til globalt min.

$$f(1,1) = -1$$

Er dette minste verdi til $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$.

$$x=0: f(0,y) = y^3$$

$$f(0,-2) = (-2)^3 = -8$$

Konklusjon: $(1,1)$ er ikke $\Rightarrow$ ingen globale min.
globalt min.

Metode:

a) hvor førsteordens- betingelse

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

b) Andrederivert-test:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$AC - B^2 < 0$: sadelpkt

$AC - B^2 > 0$: $\begin{cases} \text{lokalt min} \\ \text{hvis } A > 0 \\ \text{lokalt maks} \\ \text{hvis } A < 0 \end{cases}$

$AC - B^2 = 0$: problem!

c) Se på fulgspore- verdier i kandidat pkt. fra b)

Se på spenaltifeller.
(vanskelig)

Ex: $f(x,y) = x^3 + y^3$

$$f'_x = 0 : 3x^2 = 0$$

$$f'_y = 0 : 3y^2 = 0$$

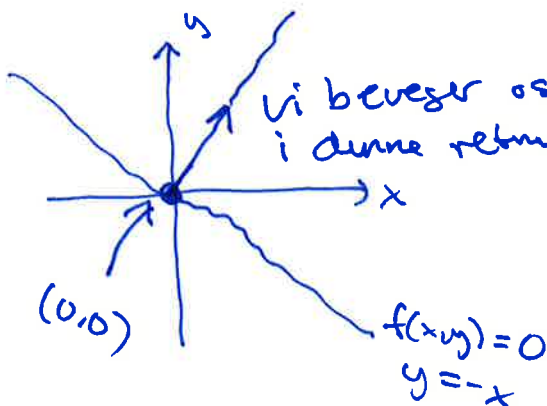
$$\left. \begin{array}{l} f'_x = 0 : 3x^2 = 0 \\ f'_y = 0 : 3y^2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=y=0 \\ (x,y) = \underline{(0,0)} \end{array} \text{ eneste stasjonære pkt.}$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det H(f)(0,0) = 0$$

Ingen konklusjon fra
annen derivert-testen!

Må bruke andre metoder: $f(0,0) = 0$



Nivåkurve: $f(x,y) = 0$

$$x^3 + y^3 = 0$$

$$y^3 = -x^3$$

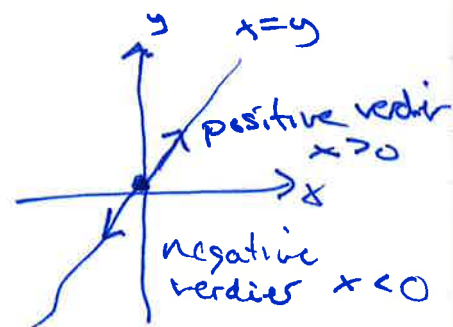
$$y = \sqrt[3]{-x^3} = -x$$

$$\underline{y = -x}$$

$x=y$: $f(x,y) = x^3 + x^3 = 2x^3$

$x > 0$: $f(x,x) = 2x^3 > 0$

$x < 0$: $f(x,x) = 2x^3 < 0$



både pos og negative verdier (dvs større/småere enn 0) nær $(0,0)$.

→ Sadelpkt