

APR 04, 2018

Plan:

① Max/min-problemer (repetisjon)

② Tangenter til nivåkurver

③ Linearisering

④ Max/min-problemer med bivilkår

Pensum:

[E] 7.4-7.5,

7.6

↑ Neste forelesning.

① Max/min-problemermax $f(x,y)$

eller

min $f(x,y)$ max/min $f(x,y)$
(uten bivilkår)Metode:① Finne stasjonære pkt = kandidater for
for f ved å løse
førsteordensbetingelsene

$$f'_x = 0, f'_y = 0$$

② Klassifisere stasjonære pkt.
som lokale maks, lokale min
eller sadelpkt. uha andredriverteknikk

$$(x^*, y^*) \leadsto H(f)(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

A.D.T.:

$$\begin{cases} \det H = AC - B^2 > 0 : \\ \quad \rightarrow A > 0 : \text{lok. min} \\ \quad \rightarrow A < 0 : \text{lok. max} \\ \det H = AC - B^2 < 0 : \\ \quad \text{sadelpkt.} \end{cases}$$

- ③ Klassifisere stasjonære pkt (x^*, y^*) s.a. $H(t)(x^*, y^*)$ har determinant 0:

$$\det H(t)(x^*, y^*) = 0 : \begin{cases} \text{kan ikke bruke A.D.T.} \\ \text{må bruke andre metoder} \end{cases}$$

- ④ Unntaksvise kandidater for maksimum (i tillegg til stas. pkt.)

* punkt i $\mathbb{R}^2$ slik at enten f'_x eller f'_y ikke er definert.

* randpkt

- ⑤ Anta at vi har funnet alle kandidatpkt (stasjonære pkt + unntak fra ④) og klassifisert dem.

Undersøk om noen av disse er globale maks/min.

Ek: $\max/\min f(x,y) = xy(x+y) = x^2y + xy^2$

① Stationære pkt: $(x,y) = \underline{(0,0)}$

$$f'_x = 2xy + y^2 = 0$$

$$f'_y = x^2 + 2xy = 0$$

$$\begin{aligned} y \cdot (2x+y) &= 0 \\ x \cdot (x+2y) &= 0 \end{aligned}$$



$$(\underline{y=0} \text{ eller } \underline{2x+y=0}) \text{ og } (\underline{x=0} \text{ eller } x+2y=0)$$

$$y=0 \text{ og } x=0$$

eller

$$y=0 \text{ og } x+2y=0$$

eller

$$2x+y=0 \text{ og } x=0$$

eller

$$2x+y=0 \text{ og } x+2y=0$$

$$\rightarrow (x,y) = (0,0)$$

$$\begin{aligned} 2x+y &= 0 \\ x+2y &= 0 \end{aligned}$$

$$y = -2x \quad \leftarrow \underline{y=0}$$

$$x + 2 \cdot (-2x) = 0$$

$$-3x = 0$$

$$\underline{x=0}$$

② Klassifikasjon: $(x,y) = (0,0)$

$$f''_{xx} = 2y \quad f''_{xy} = 2x+2y$$

$$f''_{yy} = 2x$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y \\ 2x+2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det H = \underline{0}$$

Ingen konklusjon

fra A.D.T.

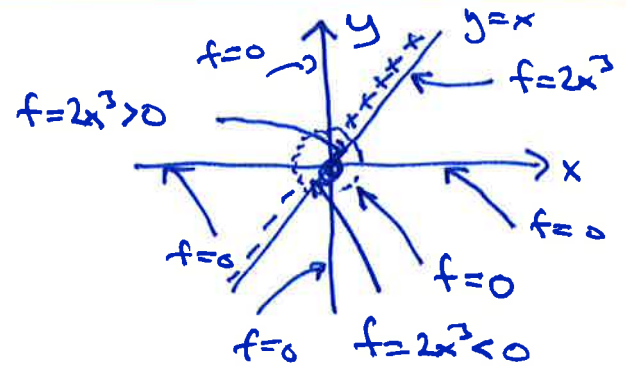
$$f(x,y) = xy(x+y) = x^2y + xy^2$$

Steq. pkt: $(x,y) = (0,0)$

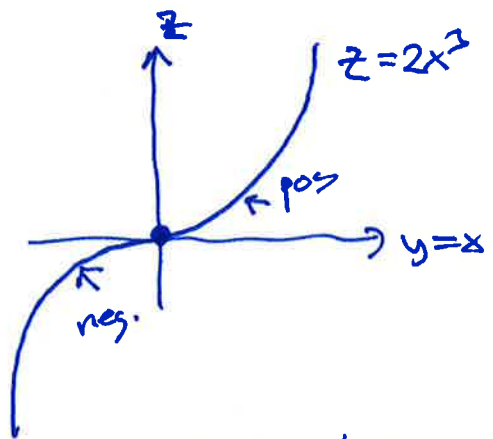
x-aksen: $y=0 \rightarrow f=0$

y-aksen: $x=0 \rightarrow f=0$

$y=x$: $y=x \rightarrow f = x^3 + x^3 = 2x^3$
 $= \begin{cases} \text{pos. } x > 0 \\ \text{neg. } x < 0 \end{cases}$



Konkl: $(x,y) = (0,0)$ er et Sadelpunkt



Konkl: f har hverken globalt maks/min.

Ex: $f(x,y) = xy(x+y-3) = x^2y + xy^2 - 3xy$

① Stas. pkt:

$$f'_x = 2xy + y^2 - 3y = 0$$

$$y(2x+y-3) = 0$$

$$f'_y = x^2 + 2xy - 3x = 0$$

$$x(x+2y-3) = 0$$

$$x=0, y=0:$$

$$y=0, x+2y-3=0:$$

$$2x+y-3=0, x=0:$$

$$2x+y-3=0,$$

$$x+2y-3=0:$$

$$2x+y=3$$

$$x+2y=3$$

$$(x,y) = (0,0)$$

$$(x,y) = (3,0)$$

$$(x,y) = (0,3)$$

$$(x,y) = (1,1)$$

② Klassifikasjon:

$$f''_{xx} = 2y \quad f''_{xy} = 2x+2y-3$$

$$f''_{yy} = 2x$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y-3 \\ 2x+2y-3 & 2x \end{pmatrix}$$

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(3,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(0,3) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det H = -9 < 0 \rightarrow (0,0) \text{ sadelpkt.}$$

$$\det H = -9 < 0 \quad (3,0) \text{ ---}$$

$$\det H = -9 < 0 \quad (0,3) \text{ ---}$$

$$\det H = -9 < 0$$

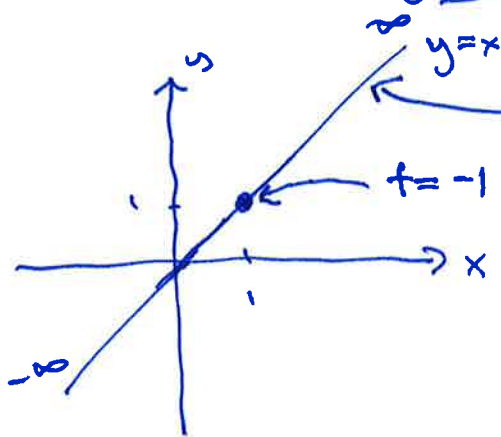
$$\det H = 3 > 0 \quad \left. \begin{array}{l} A=2 > 0 \end{array} \right\}$$

$$(1,1) \text{ lokalt min}$$

$$f(1,1) = -1$$

Konklusjon: f har ingen globale maks

globale min: kandidat $(1,1)$ med $t=-1$



$$f = x^3 + x^3 - 3x^2 \\ = 2x^3 - 3x^2$$

$$f \rightarrow \infty \text{ n r } x \rightarrow \infty \\ f \rightarrow -\infty \text{ når } x \rightarrow -\infty$$

$$f(-3, -3) = 2 \cdot (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 \\ = -54 - 27 = -81$$

f har ingen globale min

Ex: $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $D_f = \mathbb{R}^2 = \text{alle pkt. } (x,y)$
 $= \sqrt{u}, u = x^2 + y^2$ ingen randpkt

$$f'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f'_y = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_y = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$(x,y) = (0,0)$: $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ f r ikke

$\Downarrow$
 $(x,y) = (0,0)$ er kandidat for maks/min

$f(0,0) = 0$
 $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ for alle (x,y) } $(x,y) = (0,0)$ er et globalt min

Randpkt: Et randpunkt for $f(x,y)$ er et punkt på randen til defn. område D_f .

Mer relevant for max/min - problemer med bilbetingelser (neste ferd.)

men kan også opptre i problem uten bilbetingelser

Ex: max/min $f(x,y) = \sqrt{x+3y}$

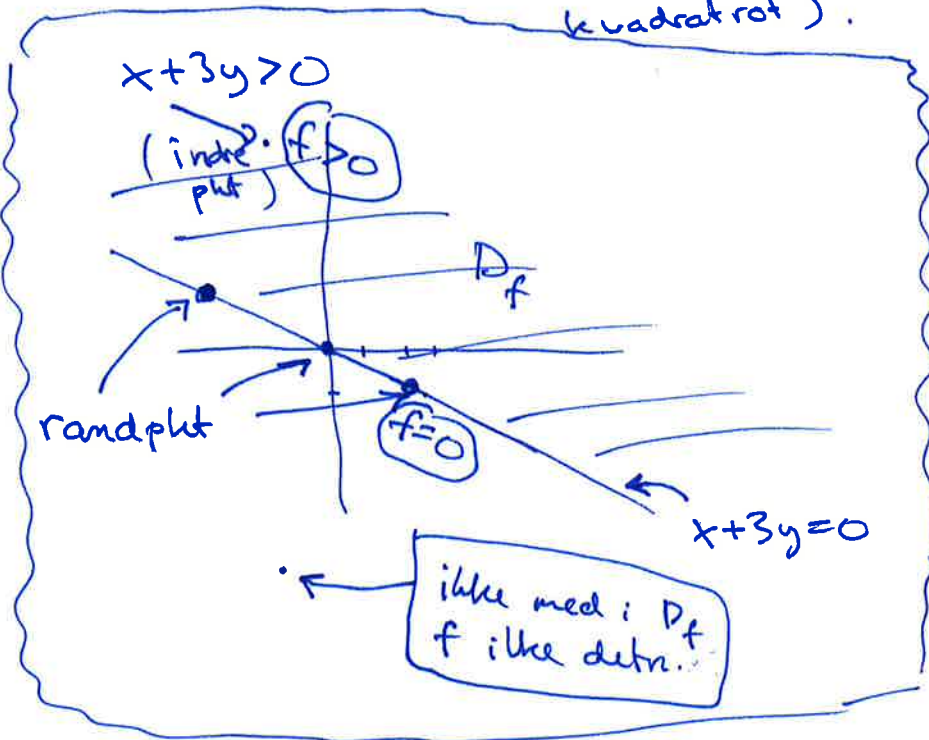
~~Ex~~

$D_f: x+3y \geq 0$

(ikke negative verdier under kvadratroten).

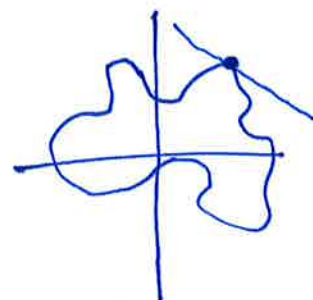
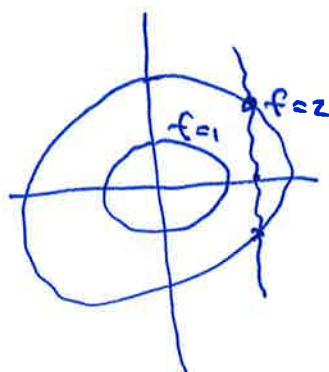
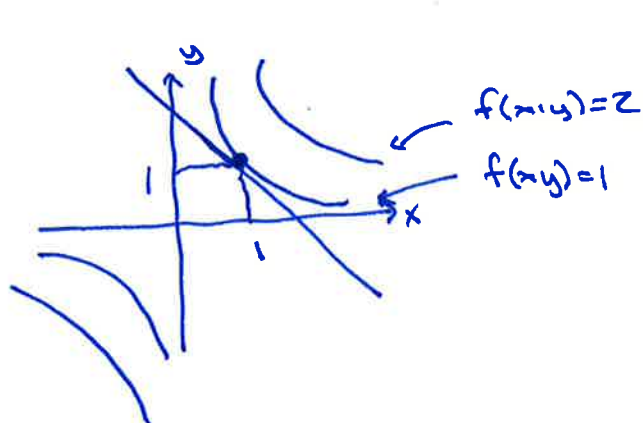
$f(\text{randpkt}) = \sqrt{0} = 0$
 $f(\text{indre pkt}) = \sqrt{\text{pos}} > 0$

!!
 Uendelig mange randpkt,
 alle er globale min.



② Tangenter til nivåkurver:

Nivåkurve: $f(x,y) = c$



$$f(x,y) = xy$$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Eks: $f(x,y) = xy$

Tangenter til $f(x,y)=1$
i $(x,y) = (1,1)$:

$$y-1 = a \cdot (x-1)$$

$$\perp$$

$$a = y'(1,1)$$

$xy=1$: $y = 1/x$

$$y' = -1/x^2$$

$$a = y'(1,1) = \underline{-1}$$

$$y-1 = -1 \cdot (x-1)$$

$$y = -x + 1 + 1 = \underline{\underline{2-x}}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

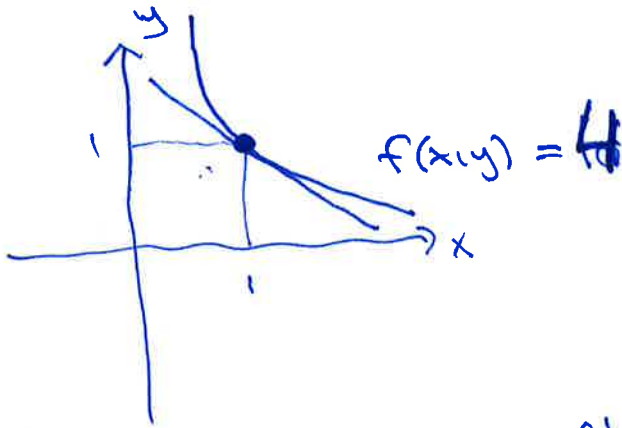
$$y = \underline{\underline{\pm \sqrt{4-x^2}}}$$

Ekse: $f(x,y) = 4x^{0.4}y^{0.6}$

(Cobb-Douglas fun.)
 $f(x,y) = C \cdot x^\alpha y^\beta$

Nivåkurven $f(x,y) = 4$:

Df: $x > 0, y > 0$



Tangente til
 nivåkurven $f(x,y) = 4$
 i pkt. $(1,1)$:

$$y - 1 = a \cdot (x - 1)$$

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 1)$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + 1$$

$$a = y'(x_0, y_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$$

$$f'_x = 4 \cdot y^{0.6} \cdot (0.4 \cdot x^{-0.6}) = 1.6 x^{-0.6} y^{0.6}$$

$$f'_y = 4 x^{0.4} \cdot (0.6 \cdot y^{-0.4}) = 2.4 x^{0.4} y^{-0.4}$$

$$y'(1,1) = -\frac{f'_x(1,1)}{f'_y(1,1)} = -\frac{1.6}{2.4} = -\frac{16}{24} = -\frac{2}{3}$$

1 anvendes:

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \text{marginal substitusjons-} \\ \text{præ}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

Oppsummering:

Tangenste til nærheten $f(x,y) \in \mathbb{C}$ i pkt.
 (x_0, y_0) har ligning

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

der $a = - \frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$

② Linearisering av

$f(x,y)$ i (x_0, y_0) :

$$L(x,y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Ex: $f(x,y) = \ln(x+y)$ i $(1,1)$:

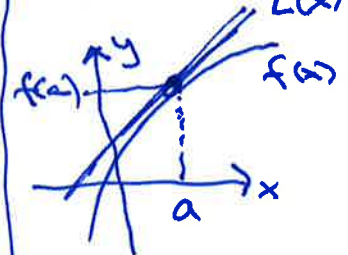
$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(1,1) + f'_x(1,1) \cdot (x-1) + f'_y(1,1) \cdot (y-1) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) \end{aligned}$$

$$f'_x = \frac{1}{x+y} \cdot 1 = \frac{1}{x+y}$$

$$f'_y = \frac{1}{x+y} \cdot 1 = \frac{1}{x+y}$$

Repetisjon:

$f(x)$ en variabel



$L(x)$ = lineærizing
 til f i $x=a$
 = tangente til
 f i $x=a$

$$L(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$$

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k \cdot (x - x_0) \\ y - f(a) &= f'(a) \cdot (x - a) \\ y &= f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \end{aligned}$$

Forklaring av formelen $y'(x_0, y_0) = - \frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}$:

Når vi deriverer ~~f~~ leddningen $f(x, y) = C$ for en nivåkurve implisitt ~~med~~ for vi

$$f(x, y) = C$$

$$f'_x + f'_y \cdot y' = 0$$

$$\frac{f'_y \cdot y'}{f'_y} = \frac{-f'_x}{f'_y}$$

$$y' = - \frac{f'_x}{f'_y}$$

Ex: $f(x, y) = x^2 + xy^3 - xy$

$f(x, y) = 1$: $x^2 + xy^3 - xy = 1$

$$2x + 1 \cdot y^3 + x \cdot 3y^2 \cdot y' - 1 \cdot y - x \cdot y' = 0$$

$$\begin{aligned} f'_x &= 2x + y^3 - y \\ f'_y &= 3xy^2 - x \end{aligned}$$

$$(2x + y^3 - y) + (3xy^2 - x)y' = 0$$

$$\frac{(3xy^2 - x)y'}{(3xy^2 - x)} = - \frac{(2x + y^3 - y)}{3xy^2 - x}$$

$$y' = - \frac{2x + y^3 - y}{3xy^2 - x}$$