

FORELESNING 3

EIVIND ERIKSEN

SEP 07, 2017

MET 1180

MATEMATIKK

Plan:

- ① Nåverdi av en konstant strøm
- ② Endelige rekker
- ③ Annuiteter og annuitetslån
- ④ Uendelige rekker og grenseverdier ←

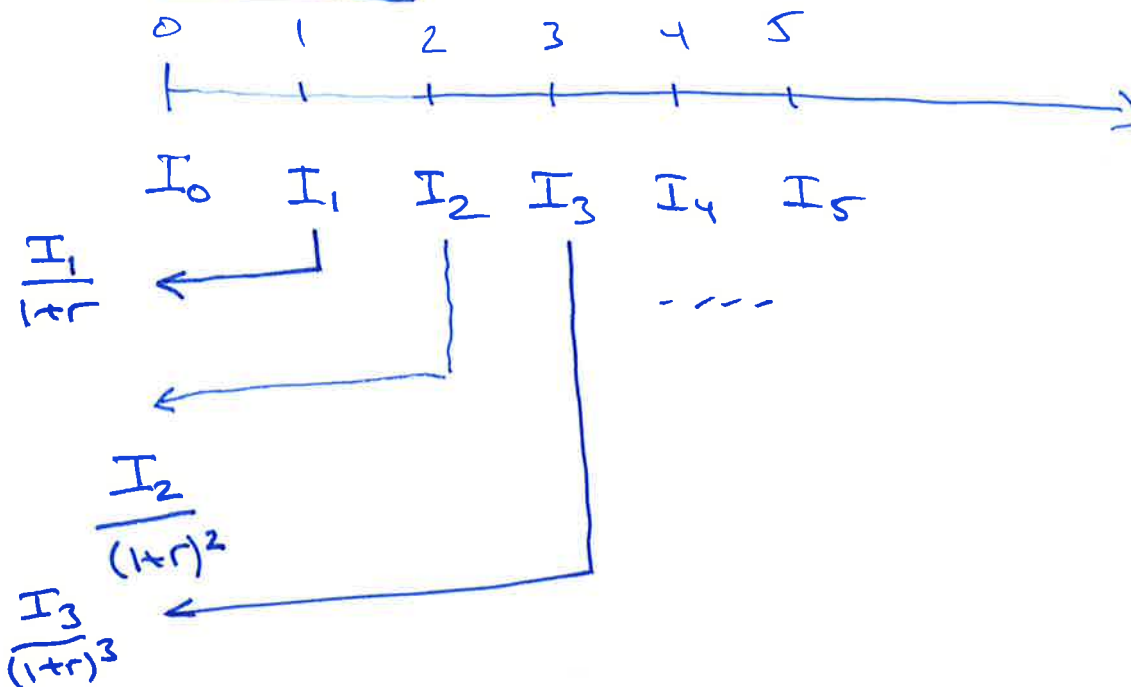
Pensum:

[E] 1.4-1.7

Utsatt til neste forelesning.

① Nåverdi:

diskonterings-
rente: r

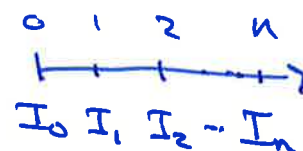


Defn: Nåverdien av en inn/utbetaling I_n etter n år er

$$\frac{I_n}{(1+r)^n} = I_n \cdot (1+r)^{-n}$$

når diskonteringsrenten er r .

Defn: Nåverdien til en kontantstrøm $(I_0, I_1, \dots, I_n)$ er summen av nåverdiene til betelene i kontantstrømmen:



$$I_0 + \frac{I_1}{1+r} + \frac{I_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{I_n}{(1+r)^n}$$

Eks:

Oppgave 1.4.1

Hvor stort beløp $\leftarrow K$ må vi sette inn på en bankkonto med 4% rate for å kunne ta ut 5000kr etter ett år og 10.000kr etter 2 år.

1,04

Alt 1:

$t=0: B_0 = K$

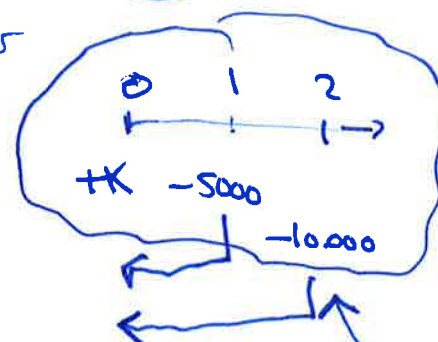
$t=1: B_1 = K \cdot 1,04 - 5000$

$t=2: B_2 = B_1 \cdot 1,04 - 10.000$

$= (K \cdot 1,04 - 5000) \cdot 1,04 - 10.000 = 0$

$K \cdot 1,04^2 - 5000 \cdot 1,04 - 10.000 = 0$

$K = \frac{5000 \cdot 1,04 + 10.000}{1,04^2}$



Alt 2:

Nåverdi av kontantstrømmen:

$$K + \frac{-5000}{1,04} + \frac{-10.000}{1,04^2} = 0$$

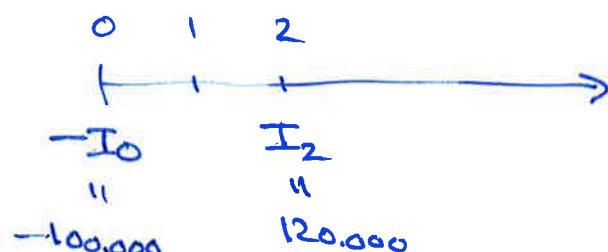
$$K = \frac{5000}{1,04} + \frac{10.000}{1,04^2} \approx \underline{14.053,25 \text{ kr}}$$

Defn: Internrente til en kaskadestruktur er diskontningsrente r slik at nåverdien blir null.

Eks:

Investeringer

Investeringen er lønnsom om nåverdien er positiv



Nåverdi: $-100.000 + \frac{120.000}{(1+r)^2}$

Diskontningsrente $r = 10\%$:

$$-100.000 + \frac{120.000}{1,102} \approx -826 \text{ kr}$$

Internrente: $-100.000 + \frac{120.000}{(1+r)^2} = 0$

$$\frac{120.000}{(1+r)^2} = 100.000$$

$$\frac{1}{(1+r)^2} = \frac{100.000}{120.000}$$

$$(1+r)^2 = \frac{120.000}{100.000} = 1,2$$

$$1+r = \sqrt{1,2}$$

$$r = \sqrt{1,2} - 1$$

$$\approx 0,0954$$

Internrente: $\rightarrow \underline{\underline{9,54\%}}$

② Endelige rekker.

$$\underbrace{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n}_{\text{tallfølge}} \rightarrow S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Aritmetiske rekker:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = d \leftarrow \begin{array}{l} \text{differansen} \\ \text{i rekken} \end{array}$$

$$a_2 - a_1 = d : a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 - a_2 = d : a_3 = a_2 + d$$

⋮

Ex: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 17$

← Aritmetiske rekke med $d=2$.

Formler:

i) $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$

ii) $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

$$a_7 = 1 + 2 \cdot 6 = 13$$

$$a_n = 17$$

$$1 + 2 \cdot (n-1) = 17$$

$$2 \cdot (n-1) = 16$$

$$n-1 = 8$$

$$\underline{n = 9}$$

Ex: $1 + 3 + 5 + \dots + 17 = 9 \cdot \frac{1+17}{2} = \underline{\underline{81}}$

Geometriske rekker

Tallfølger $a_1, a_2, \dots, a_n$ kalles geometrisk dersom det finnes et tall k slik at

$$\frac{a_2}{a_1} = k, \frac{a_3}{a_2} = k, \frac{a_4}{a_3} = k, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = k$$

Tallet k kalles konstanten til den geometriske rekken.

Dvs:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot k \\ a_3 &= a_2 \cdot k \\ a_4 &= a_3 \cdot k \\ &\vdots \end{aligned}$$

hver tall i tallfølgen er like det forrige tallet multiplisert med k .

Exs.

$$\underbrace{10.000}_{a_1} + \underbrace{10.000 \cdot 1,04}_{a_2} + \underbrace{10.000 \cdot 1,04^2}_{a_3} + \underbrace{10.000 \cdot 1,04^3}_{a_4}$$

↑
geometrisk
rekke med
 $k = 1,04$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$

↑
geometrisk
med $k = \frac{1}{2}$.

Formler:

Geometriske rekker

i) $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$

ii) $S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k}$

$n = \text{antall ledd i summen}$

Ex:

$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63}$

" " " "

a_1 " a_n

"

← geometriske rekke
 $k=2$, $n=64$

$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
 $= 1 \cdot 2^{63} = \underline{2^{63}}$

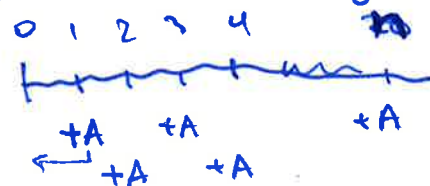
$1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx \underline{\underline{1,8 \cdot 10^{19}}}$

③

Annuiteter og annuitetslån.

En etterskuddsannuitet: Man mottar et fast beløp A hvert år, første gang om ett år, og til sammen n ganger.

Nåverdi av etterskuddsannuitet:



$\frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \frac{A}{(1+r)^3} + \dots + \frac{A}{(1+r)^n}$

← geometriske rekke
 $k = \frac{1}{1+r}$

$$\frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A}{(1+r)^n} = q_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k} \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 = \frac{A}{1+r} \\ k = \frac{1}{1+r} \end{array} \right.$$

$$= \frac{A}{1+r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{A \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right)}{(1+r) \cdot \left(1 - \frac{1}{1+r}\right)}$$

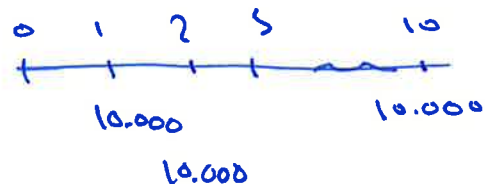
$$= \frac{\cancel{(1+r)} - \cancel{1}}{\cancel{(1+r)} - \cancel{1}} = \frac{A \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right) \cdot (1+r)^n}{r \cdot (1+r)^n}$$

$$= \boxed{\frac{A \left((1+r)^n - 1 \right)}{r \cdot (1+r)^n}}$$

Formel for etterskudds-annuitet med:

- rente: r
- antall år: n
- første utbetaling etter 1 år.

Ex: $A = 10.000 \text{ kr}$
 $n = 10$
 $r = 10\%$



Nåverdi: $\frac{10.000 \cdot (1,1^{10} - 1)}{0,10 \cdot 1,1^{10}} \approx \underline{\underline{61.445,67 \text{ kr}}}$

Etterskuddsannuitet:

En etterskuddsannuitet med utbetalings A per år, i tillegg sammen n år, med første betaling etter ett år, har nåverdi

$$\frac{A \cdot \left((1+r)^n - 1 \right)}{r \cdot (1+r)^n}$$

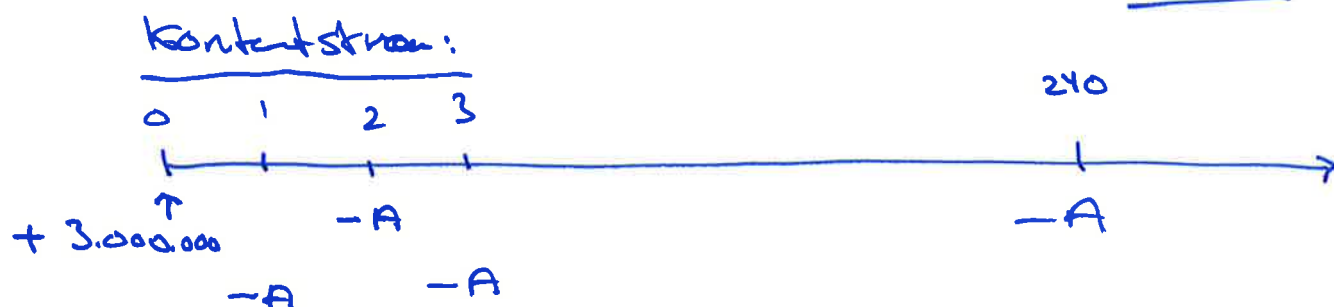
når diskonteringsrenten er r .

Annuiteitslån: Et lån som tilbakebetales med et fast beløp A per termin.

Eks: Lånebeløp: 3.000.000 kr
tilbakeløst: 20 år, med mnd. - terminer
og rente 2,4% per år nominelt.

||

Antall terminer: $20 \times 12 = 240$ mnd
Termi rente: $r = \frac{2,40\%}{12} = \frac{0,024}{12}$
 $= 0,002$



Nåverdi betrekning: $+3000000 - \frac{A}{1+r} - \frac{A}{(1+r)^2} - \dots - \frac{A}{(1+r)^{240}} = 0$

$$3.000.000 = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A}{(1+r)^{240}}$$

$$3.000.000 = \frac{A \cdot ((1+r)^{240} - 1)}{r \cdot (1+r)^{240}}$$

$$A = \frac{3.000.000 \cdot r \cdot (1+r)^{240}}{(1+r)^{240} - 1} = \frac{3.000.000 \cdot 0,002 \cdot 1,002^{240}}{1,002^{240} - 1}$$

~~Alt~~ $\approx \underline{\underline{15.751,34 \text{ kr}}}$

$L = 3.000.000$: Annuitetslån med terminbeløp $A = 15.751,34$

	Rente	Audrag	Terminbeløp	Restsaldo
1	6.000	9.751,34	15.751,34	2.990.248,66
2	5.990,60	9.770,84	15.751,34	2.980.477,82
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
240			15.751,34	0

<u>Totalt:</u>	780.322	3.000.000	3.780.322
----------------	---------	-----------	-----------

$$\begin{array}{rcl}
 & \uparrow & \uparrow \\
 & 3.780.322 & \text{lån} \\
 - & 3.000.000 & \\
 \hline
 = & 780.322 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rcl}
 & \uparrow & \\
 & 240 \cdot 15.751,34 &
 \end{array}$$

Annuitetslån:

Et annuitetslån med lånebeløp L , terminrente r og n terminer har terminbeløp

$$A = \frac{L \cdot r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Bruk av formelen: r er (nominell) årsrente og antall års nedbetalingsperiode oppgitt.

For eksempel: Rente 3% per år (nom.), tilbakebetaling over 20 år.

Da blir: $r = \frac{3\%}{12} = \frac{0,03}{12} = \underline{0,0025}$
(terminrente)

$n = 12 \cdot 20 = \underline{240}$
(antall terminer)

$$A = \frac{2.500.000 \cdot 0,0025 \cdot 1,0025^{240}}{1,0025^{240} - 1}$$

Ekse.
 $L = 2.500.000$ kr
 $r = 0,0025$
 $n = 240$

$\approx \underline{13.864,94 \text{ kr}}$

Kalkulator: (eksempel pi)

$1,0025 \square \div \square 240 - 1 \square = 0,82\dots$
 $\square \div \square$
 $\square 2500000 \square \times 0,0025$
 $\square 1,0025 \square \div \square 240 \square = 13.864,94$