

Plan: Apr 11 2018Pensum:

LES 7.6

① Oppgave 10, Oppgavesett III

② Max/min-problemer med bibetjinger

③ Lagrange-problemer (neste gang)

Eksemenssett I: Seminargruppe denne ukenEksemenssett II: Leses ut i dag

① Oppgave 10, Oppgavesett III (trivialis innledning)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 2 & 0 \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2a \\ 6 \end{pmatrix} \quad \boxed{Ax = \underline{b}}$$

$$a) \det(A) = +2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 2(1 - a^2) = 2 - 2a^2 \\ = \underline{2(1-a)(1+a)}$$

$$b) \underline{a=2}: A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ |A| = -6$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ i & i & i \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 6 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{Ax} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \cancel{A}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}} \\ \underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

c) Vet fra teori: $|A| \neq 0$: En løsning
 $|A| = 0$: Ingen løsn. eller uendelig mange løsn.

$$|A| = 2(1-a)(1+a) = 0$$

$$a = 1 \text{ eller } a = -1$$

Kontroll: $a \neq 1, -1$: En løsning

$$a = 1: \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{-1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

z fri, uendelig mange løsn.

$$a = -1: \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{+1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array} \right]$$

Ingen løsn.

i) $a = -1$ ii) $a \neq 1, -1$ iii) $a = 1$

d) Uendelig mange løsn: $a = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2y &= 2 \end{aligned}$$

trappetform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-z \\ 1 \\ z \end{pmatrix}, z \text{ fri}$$

$$x = 6 - y - z = 5 - z$$

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ z &\text{ er fri} \end{aligned}$$

$$(x, y, z) = (5-z, 1, z), z \text{ fri}$$

c) En løsn: $a \neq 1, -1$

$$x = \frac{|A_1(b)|}{|A|}$$

~~$$2a^3 - 12a + 12$$~~

$$= \frac{2a^4 - 2a^2 - 12a + 12}{2(1-a)(1+a)}$$

$$y = \frac{|A_2(b)|}{|A|} = \dots$$

$$z = \frac{|A_3(b)|}{|A|} = \dots$$

$$|A| = 2(1-a)(1+a)$$

$$|A_1(b)| = \begin{vmatrix} 6 & a & a \\ 2a & 2 & 0 \\ 6 & a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a \cdot (2a^3 - 12) + 1(12 - 2a^3)$$

~~$$2a^3 - 12a + 12$$~~

$$= 2a^4 - 12a + 12 - 2a^2$$

← tilsvarende metode,
se løsningsferdug

② Optimering med bivilkninger

Optimering = max/min-problem

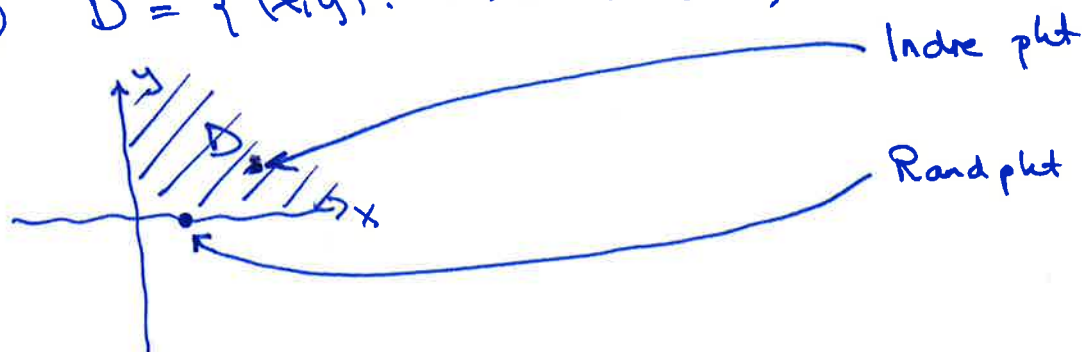
Bivilkninger: ekstra betingelser som må oppfylles
input-variablene (x, y)

Ex: i) max: $f(x, y) = e^{2-x-y}$ når $x \geq 0, y \geq 0$
objektivfunksjon bivilkninger

ii) min $f(x, y) = xy$ når $x^2 + y^2 = 4$
obj. funksjon bivilkningse

Tillatte punkter: Alle pkt som oppfylles bivilkningene
 $D = \{ \text{alle pkt som oppfylles bivilk.} \}$

Ex: i) $D = \{ (x, y) : x \geq 0 \text{ og } y \geq 0 \}$



ii) $D = \{ (x, y) : x^2 + y^2 = 4 \}$



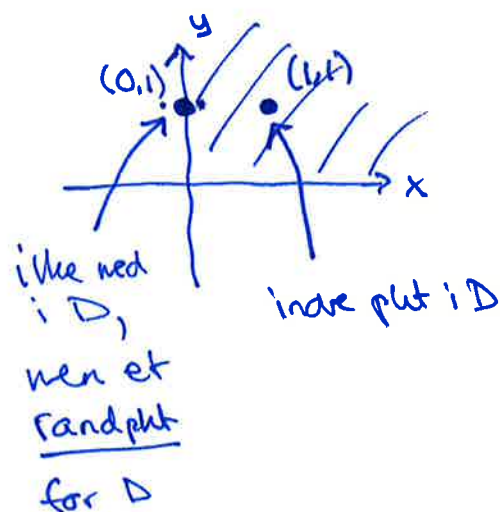
D = mengden av tillatte pkt ,

(x,y) i D er indre pkt: alle pkt nært (x,y) ligger også i D

(x,y) er et randpkt for D : det fins pkt nært (x,y) som er utenfor D , men også pkt nært (x,y) som er i D .

Ex: $x > 0, y > 0$

$$D = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$$



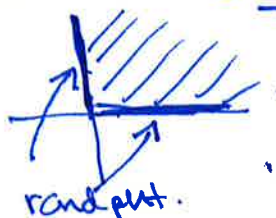
Defn: D er lukket

hvis alle randpkt til D er ned i mengden D .

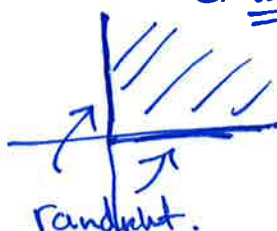
D er åpen

hvis ingen randpkt til D er ned i mengden D
(alle pkt er indre pkt)

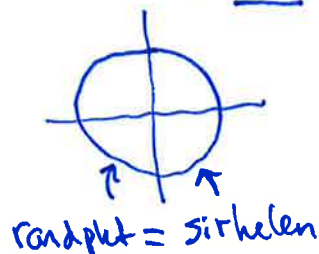
Ex: $D: x \geq 0, y \geq 0$ er lukket



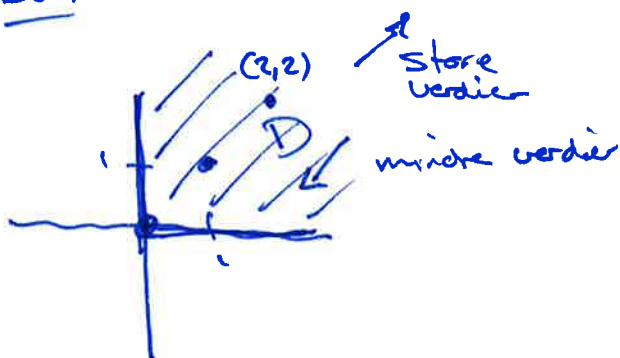
Ex: $x > 0, y > 0$ er ikke lukket (åpen)



Ex: $x^2 + y^2 = 4$ er lukket



Ex: min e^{xy} når $x > 0, y > 0$
(ikke lukket)



$$f(1,1) = e^1 \approx 2,7$$

$$f(2,2) = e^4 \text{ (stort)}$$

$$f(0,0) = e^0 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \text{ eller } y=0: f(x,y) = 1 \\ x > 0, y > 0: f(x,y) > 1 \end{array} \right\} \text{ for alle noe min side rundt "nagler"}$$

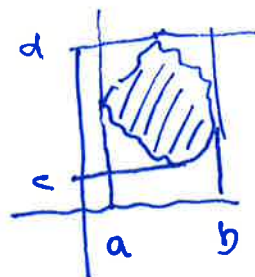
Resultat: Ekstremverdisetningen
Hvis $f(x,y)$ er en kontinuerlig funksjon
og D (mengde av tillatte p.k.t.) er lukket
og begrenset, da har
 $\max(\min f(x,y))$ når (x,y) er med i D
et maximum og et minimum.

Defn: Mengde D av tillatte p.k.t er begrenset
hvis det fis tall a, b, c, d slik at

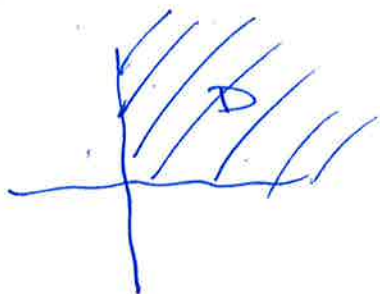
$$a \leq x \leq b$$

$$c \leq y \leq d$$

for alle $(x,y) \in D$.

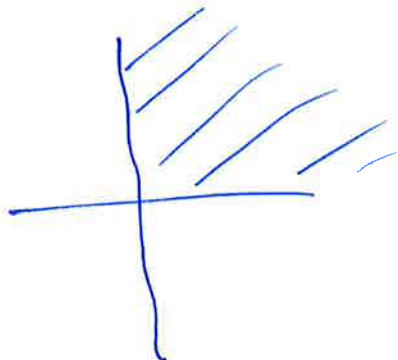


Ex: $D: x \geq 0, y \geq 0$



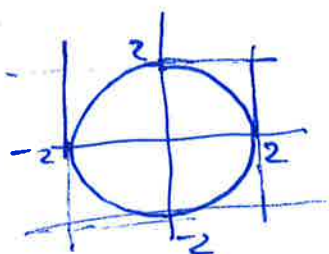
ikke begrenset
(ingen største x/y -verdi)
lukket

$D: x \geq 0, y \geq 0$



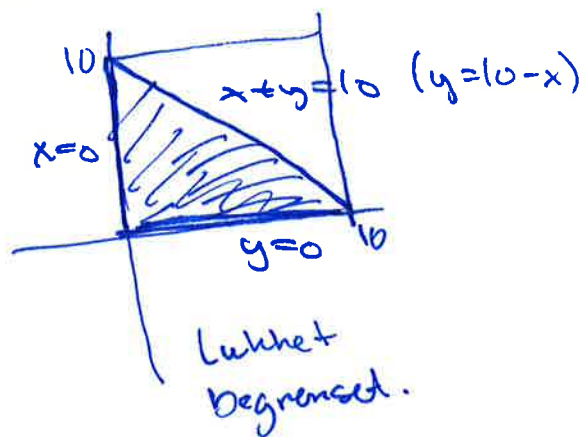
ikke begrenset
ikke lukket

Ex: $D: x^2 + y^2 = 4$



begrenset $(-2 \leq x \leq 2$
 $-2 \leq y \leq 2)$
lukket

$D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 10$



lukket
begrenset.

$$\begin{pmatrix} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{pmatrix}$$

Ex: $\max f(x,y) = xy$ når $x^2 + y^2 = 4$ ← Lagrange-problem

i) $\max f(x,y) = xy$ når $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 10$

ii) $\max f(x,y) = xy$ når $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 10$

Metode for å finne kandidater for maksimum.

(a) Kandidater som er indre punkt:

- finn stasjonære pkt og sjekk om de er indre pkt i D.

(b) Kandidater for maksimum som er randpkt

- sjekk alle pkt på randen (enkel tilfelle)

eller

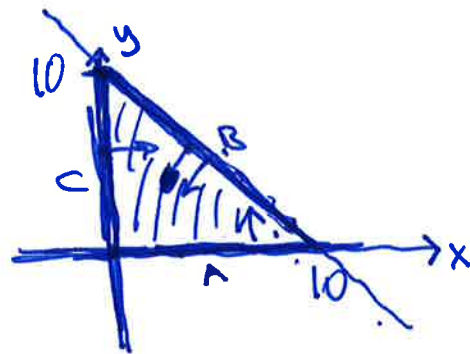
- bruk Lagranges metode

Ex: $\max f(x,y) = xy$

Indre pkt: $x > 0, y > 0, x+y < 10$

Rand pkt: "tre sidekanter"

når $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 10$



Kandidater, indre pkt:

$$\left. \begin{array}{l} f'_x = y = 0 \\ f'_y = x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (x,y) = (0,0) \\ \text{stang. pkt.} \\ \text{ikke indre pkt} \end{array}$$

$x \geq 0$: $x=0 \rightarrow y$ -aksen
 $x > 0 \rightarrow$ høyre side

$y \geq 0$: $y=0 \rightarrow x$ -aksen
 $y > 0$ oppside

Kandidater, randpkt:

$x+y \leq 10$: $x+y=10 \rightarrow y=10-x$
 $x+y < 10 \rightarrow y < 10-x$ (under)

A: $y=0, 0 \leq x \leq 10$
 $f(x,0) = 0$

B: $x+y=10 \rightarrow y=10-x$
 $0 \leq x \leq 10$
 $f(x, 10-x) = x \cdot (10-x)$
 $= 10x - x^2$

$$(10x - x^2)' = 10 - 2x = 0$$

$$x = 5$$



max på B:
 $f(5,5) = 25$

C: $x=0, 0 \leq y \leq 10$
 $f(0,y) = 0$

Randpkt
med
størst verdi
for f :

$f(5,5) = 25$

Indre pkt:
ingen kandidat

Beste
kandidat
for max.

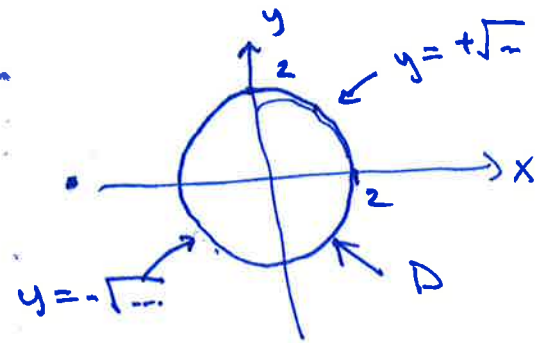
Pga elastisitetssatsen.
(D er likhet og begrenset)
se her f er vals

$f_{\max} = 25$; $(x,y) = (5,5)$

Eks: $\max_{x,y} f(x,y)$ når $x^2 + y^2 = 4$

Ekstremverdisetn. D er lukket og begrenset

$f(x,y) = xy$ har et max



Kandidater: - Indre pkt: Ingen indre pkt i D.

- Randpkt: $x^2 + y^2 = 4$
 $y^2 = 4 - x^2$
 $y = \pm \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 2$

$y = \sqrt{4 - x^2}: f(x,y) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 2$

$y = -\sqrt{4 - x^2}: f(x,y) = -x \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 2$

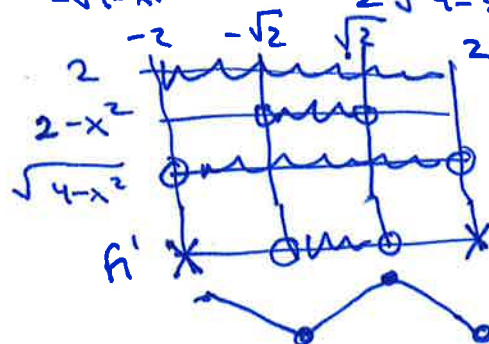
finn maks av disse to fn. i en variabel.

Øvre halvside:

$$h(x) = x \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 2$$

$$h'(x) = 1 \cdot \sqrt{4 - x^2} + x \cdot \frac{1 \cdot (-2x)}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2(4 - x^2) - 2x^2}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{8 - 4x^2}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$= \frac{2(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}}$$



$$x = +\sqrt{2} \quad y = \sqrt{2}$$

$$x = -2 \quad y = 0$$

$\Downarrow$ Kandidater for max:

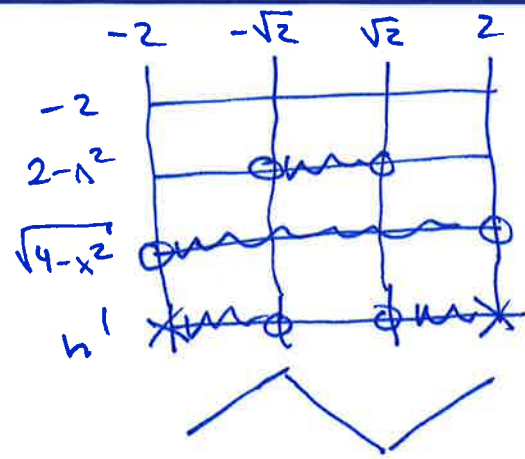
$$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2 \leftarrow \text{best}$$

$$f(-2, 0) = 0$$

Nedre halvdel: fra forrige side

$$h(x) = -x \sqrt{4-x^2}$$

$$h' = - \left(\frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} \right) = \frac{-2 \cdot (2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$



Kand. for max:

$$x = -\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$$

$$x = 2, y = 0$$

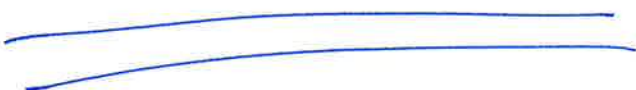
$$f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2 \leftarrow \text{best}$$

$$f(2, 0) = 0$$

Konklusjon:

Maksimumsverdi $f = 2$

$$\text{i } (x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$



Det ville vært enklere å bruke
Som gjennomgåes neste gang.

Lagrange's metode her,