

Plan:

- ① Lagranges metode
- ② Globale maks/min
- ③ Tolkning av Lagrange-multiplikatoren
- ④ Degenerert bibetningelse

Pensum:

[E] 7.6

Neste forelesning: Eksamensoppgave
Repetisjon Kap. 7.Tilbakemelding: Ekstra
rep. forelesning i eksamensperiode.Ny eksamensordning, fra neste år.

Korte etter gammel ordning: Høst '18/vår '19.

Neste tirsdag: Ingen kontertid.

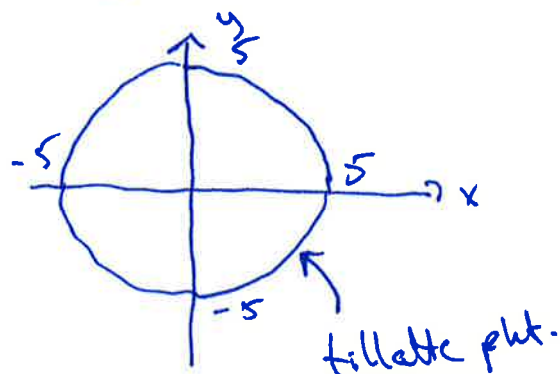
① Lagranges metodeLagrange-problem:

max/min	$f(x,y)$	når	$g(x,y)=a$
	obj. funksj.		fn. konst.

$$(x^2 + y^2 - 25 = 0)$$

Eksp: max $3x - 4y$ når $x^2 + y^2 = 25$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f(x,y)} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{g(x,y)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_a$

Lagranges metode:

$$L = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$$

$$L(x,y;\lambda) = 3x - 4y - \lambda \cdot (x^2 + y^2)$$

 λ : Lagrange-multiplikator

FOC: første-ordens bet.

$$\begin{cases} L'_x = f'_x - \lambda \cdot g'_x = 3 - \lambda \cdot 2x = 0 \\ L'_y = f'_y - \lambda \cdot g'_y = -4 - \lambda \cdot 2y = 0 \\ C: \text{bibr betingelse} \quad \{ g(x,y) = a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3 - \lambda \cdot 2x &= 0 \\ -4 - \lambda \cdot 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}$$

tre likninger
: tre ubekjente

Lagrange-betingelser: FOC + C $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ g(x,y) = a \end{cases}$

Løsningene av FOC + C = kandidater for max (min)

Foc:
$$\begin{cases} L'_x = 3 - \lambda \cdot 2x = 0 \\ L'_y = -4 - \lambda \cdot 2y = 0 \end{cases}$$

C:
$$x^2 + y^2 = 25$$

$\lambda = 0$ gir $3 = 0$
umulig!

$$\frac{3}{2\lambda} = \frac{\lambda \cdot 2x}{2\lambda} \rightarrow x = \frac{3}{2\lambda} \quad (\lambda \neq 0)$$

$$\frac{-4}{2\lambda} = \frac{\lambda \cdot 2y}{2\lambda} \rightarrow y = \frac{-4}{2\lambda} \quad (\lambda \neq 0)$$

$$x^2 + y^2 = 25 : \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{-4}{2\lambda}\right)^2 = 25$$

$$\frac{9}{(2\lambda)^2} + \frac{16}{(2\lambda)^2} = 25$$

$$\frac{25}{(2\lambda)^2} = 25$$

$$(2\lambda)^2 = 1 \rightarrow 2\lambda = \pm 1 \rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

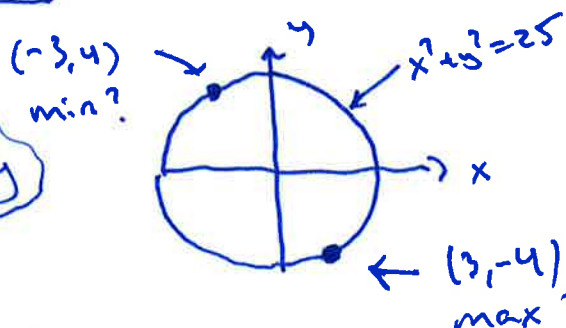
$\lambda = 1/2$: $x = 3, y = -4$

$\lambda = -1/2$: $x = -3, y = 4$

Kandidater for max:

$$(x, y; \lambda) = (3, -4; \frac{1}{2}) \quad f = 25$$

$$(-3, 4; -\frac{1}{2}) \quad f = -25$$

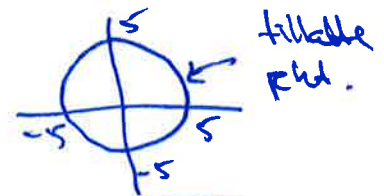


$f = 3x - 4y$

Ekstremverdisøking:

$$x^2 + y^2 = 25$$

billett.



tilkalle
pkt.

tilkalle og
begrenset!

max $3x - 4y$ når $x^2 + y^2 = 25$

her et maksimum.

Kandidater for max:

$$\begin{array}{ll} (3, -4; 1/2) & f = 25 \\ (-3, 4; -1/2) & f = -25 \end{array}$$

Konklusjon:

$(x, y) = (3, -4)$ er maksimumspkt

$f(3, -4) = 25$ er maksimumverdi

$$\lambda = 1/2 :$$

$$\max \quad 3x - 4y$$

" $f(x,y)$

$$\text{med } x^2 + y^2 = 25$$

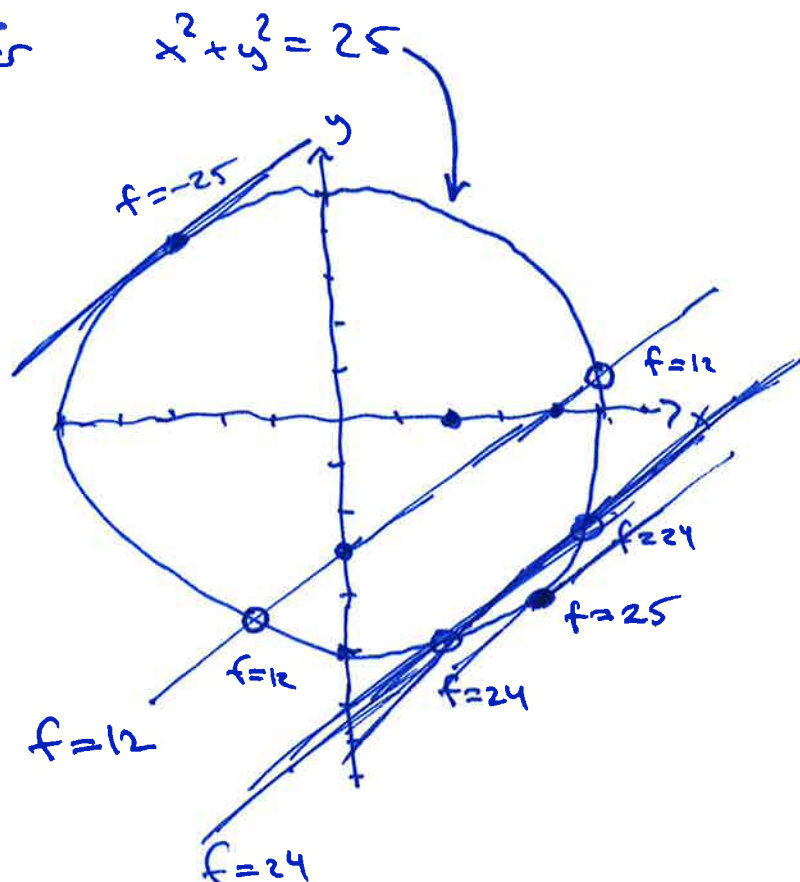
Nivåkurver for f :

i) $f(x,y) = 12$

$$3x - 4y = 12$$

ii) $f(x,y) = 24$

$$3x - 4y = 24$$



Lagrange: Hvis (x,y) er et maks/min,
 så er tangent til nivåkurven
 $\underline{f(x,y) = c}$ lik tangent til
 kurven $g(x,y) = a$.

$$f(x,y) = c: \quad \text{stigs. tall til tangent} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

$$g(x,y) = a: \quad \text{--- " ---} = -\frac{g'_x}{g'_y}$$

Likning: $\sim \frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{g'_x}{g'_y}$

$$\frac{f'_x}{g'_x} = \frac{f'_y}{g'_y} = \lambda$$

$$\begin{aligned} f'_x &= \lambda \cdot g'_x \\ f'_y &= \lambda \cdot g'_y \end{aligned}$$

$\leftarrow L'_x = 0$
 $\leftarrow d'_y = 0$

Oppsummering:

Lagrange-problem: $\max/\min f(x,y)$ når $g(x,y)=a$

$$L = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$$

Lagrange-
betingelser

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ g(x,y) = a \end{cases}$$

tre likn. i
toe ulste

Løsning av

Kandidater for $\max/\min$

② Howdan finne $\max/\min$?

Ekstremverdi settning:

Hvis $g(x,y)=a$ er begrenset, fin det et max/min.

Alltid kort å gjøre:

Regn ut $f(x,y)$ for alle
kandidatpkt, og sammenligne
verdiar.

③ Tolkning av Lagrange-multiplikatoren λ :

Ekse: maks $\underbrace{3x-4y}_{f(x,y)}$ når $\underbrace{x^2+y^2=25}_{g(x,y)=a}$

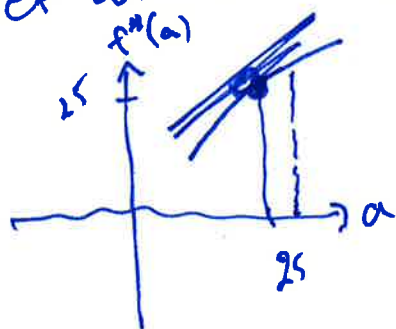
Løsning: $f_{\text{maks}} = 25$; $(x,y) = (3,-4)$
med $\lambda = 1/2$?

Tolkning: $\lambda = 1/2$ betyr at hvis betel.
 endres til $x^2+y^2=26$,
 så vil maksimumsverdien endres
 til ca. $25 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 25.5$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 gammel λ endring
 maks i a
 ($a=25$) ($26-25$)

$f^*(a)$ = maks. verdi til problemet
 maks $3x-4y$ når $x^2+y^2=a$

Vet at $f^*(25) = 25$



Tolkning av λ :

$$\lambda = \frac{df^*(a)}{da}$$

endres i maks-verdi
 per endring i a.

$$f^*(30) \approx 25 + \frac{1}{2} \cdot 5 = \underline{\underline{27.5}}$$

Eles: $\frac{\max}{\min} \overbrace{x^2+y^2}^{f(x,y)} \text{ n r } \underbrace{xy=1}_{g(x,y)=a}$

$$h = x^2 + y^2 - \lambda \cdot (xy) \quad \leftarrow h = f - \lambda \cdot g$$

$$\begin{cases} h'_x = 2x - \lambda \cdot y = 0 \\ h'_y = 2y - \lambda \cdot x = 0 \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$(1) \quad \frac{2x}{2} = \frac{\lambda y}{2} \rightarrow x = \frac{\lambda}{2} \cdot y$$

$$(2) \quad 2y = \lambda x$$

$$2y = \lambda \cdot \frac{\lambda}{2} y$$

$$2y = \frac{\lambda^2}{2} \cdot y \quad | \cdot 2$$

$$4y = \lambda^2 y$$

$$4y - \lambda^2 y = 0$$

$$y(4 - \lambda^2) = 0$$

$$y=0 \text{ eller } 4 - \lambda^2 = 0$$

$$y=0$$

$$x=0$$

$$(3) \quad 0=1 \text{ umulig!}$$

$$\lambda^2 = 4$$

$$\lambda = \pm 2$$

$$\lambda = 2 \text{ eller } \lambda = -2$$

$$\boxed{x=y} \quad \boxed{\lambda=2}$$

$$\boxed{x=-y} \quad \boxed{\lambda=-2}$$

$$(\pm 1, \pm 1) ?$$

$$x \cdot x = 1$$

$$x^2 = 1 \quad x = \pm 1$$

$$(x, y; \lambda) = (1, 1; 2), (-1, -1; 2)$$

$$(-y) \cdot y = 1$$

$$-y^2 = 1$$

$$y^2 = -1 \text{ umulig!}$$

Konklusjon: Kandidater for max/min:

$$(x, y; \lambda) = \underline{(1, 1, 2)}, \quad \underline{(-1, -1; 2)}$$

$$f = 2$$

$$f = 2$$

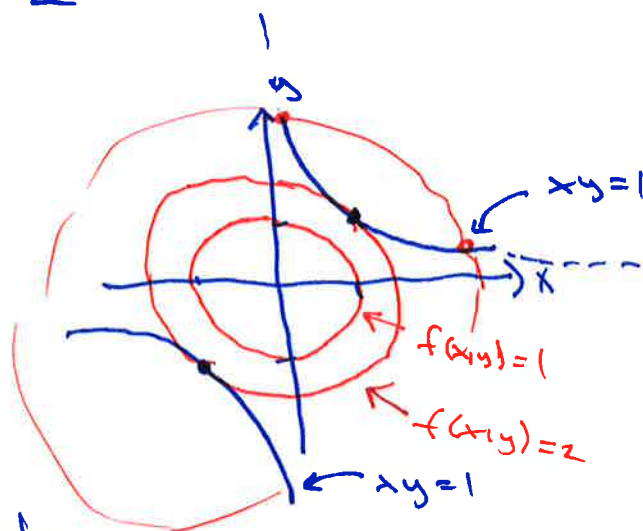
Spørre for max/min:

Betragtelse $xy = 1$

$$y = 1/x$$

ikke begrenset

kan ikke bruke ekstremverdi.



Nivåkurver: $f(x,y) = C$
 $x^2 + y^2 = C$

Konklusjon:

$$(x, y) = (1, 1), (-1, -1)$$

er minimumpunkt
 med $f_{\min} = 2$

Det blir også uakt.

④ Degeneriert bilinear

Unntakspkt; pkt som kan være maks/min,
; tillegg til de vi får ved å

case $\left\{ \begin{array}{l} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ g(x,y) = a \end{array} \right.$

Et tillatt plott ved akkurat bifotfyllere:

$$\left. \begin{array}{l} g'_x = 0 \\ g'_y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{degenerat} \\ \text{betrachtung} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} g(x,y) = a \end{array} \right\} \text{falsch.}$$

Ein: muss $3x-4y$ nur $x^2+y^2=25$

$$\left. \begin{array}{l} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ g = 1 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (x, y) = (3, -4) \\ \quad \quad \quad = (-3, 4) \end{array} \quad \begin{array}{l} f = 25 \\ f = -25 \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda = 1/2 \\ \lambda = -1/2 \end{array}$$

Degenerat b: betrachte: $x^2 + y^2 = 25$

$$\left. \begin{aligned} g'_x &= 2x = 0 \\ g'_y &= 2y = 0 \end{aligned} \right\} (x,y) = (0,0)$$

9 } ingen tillägg
klut med
des. b-betäckelse