

FORELESNING 4

EIVIND ERIKSEN

SEP 14, 2017

MET1180

MATEMATIKK

Plan:

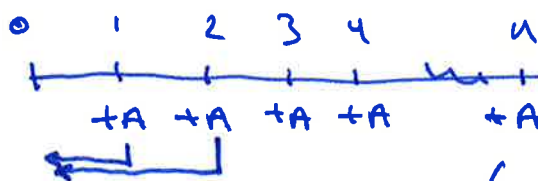
- ① Annuitetslån og serielån
- ② Uendelige rekker
- ③ Kontinuerlig forrentning og Eulers tall e

Periode:

[E] 1.6-1.8

① Annuitetslån og serielån

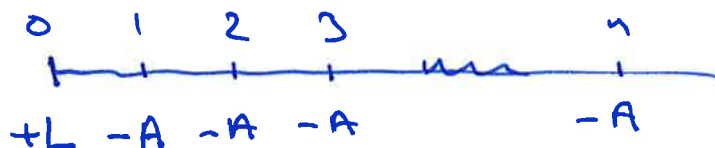
Ellerskuddssnittet:



Nåverdi: $\frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A}{(1+r)^n} = \frac{A((1+r)^n - 1)}{r \cdot (1+r)^n}$

Annuitetslån:

Lånebeløp L
Antall terminer: n
Terminrente: r



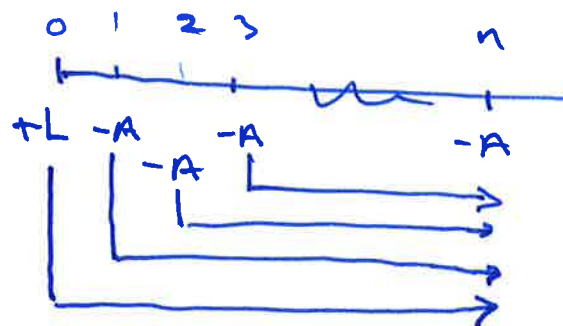
Nåverdi: $+L - \frac{A}{1+r} - \frac{A}{(1+r)^2} - \dots - \frac{A}{(1+r)^n}$

$= L - \frac{A \cdot ((1+r)^n - 1)}{r \cdot (1+r)^n} = 0$

$L = \frac{A \cdot ((1+r)^n - 1)}{r \cdot (1+r)^n}$

$A = \frac{L \cdot r \cdot (1+r)^n}{((1+r)^n - 1)}$

Sluttverdi (fraktsverdi):



Balansen på lånet
ved slutt - $\longrightarrow$
fredaght.

Sluttverdi:

$$\begin{aligned} L \cdot (1+r)^n - A \cdot (1+r)^{n-1} - A \cdot (1+r)^{n-2} - \dots - A &= 0 \\ &= \text{nåverdi} \cdot (1+r)^n \\ &= \left(L - \frac{A \cdot ((1+r)^n - 1)}{r \cdot (1+r)^n} \right) \cdot (1+r)^n \end{aligned}$$

$\text{Sluttverdi} = \text{nåverdi} \cdot (1+r)^n$

Serielån: Fast avdrag
 Varierende rente

Lånebeløp : L
Antall terminer : n
Renten : r
(terminrenten)

Serielån:

Avdrag: $\frac{L}{n}$

Renter:

$$\begin{aligned} R_1 &= L \cdot r \\ R_2 &= \left(L - \frac{L}{n} \right) \cdot r = Lr - \frac{Lr}{n} \\ R_3 &= \left(L - 2 \frac{L}{n} \right) \cdot r = Lr - 2 \frac{Lr}{n} \end{aligned}$$

Konklusjon: Rentene avtar
og danner en aritmetisk
 rekke.

med $d = -\frac{Lr}{n}$

Ek:

$L = 3.000.000$ kr
 $n = 300$ (25 år)
 $r = 0,002$ (2,4% p.a.)

Avdrag: $\frac{3.000.000 \text{ kr}}{300} = 10.000 \text{ kr}$

R1: $3.000.000 \text{ kr} \cdot 0,002 = 6.000 \text{ kr}$

$$\underline{R2: (3.000.000kr - 10.000kr) \cdot 0,002}$$

$$= 6.000kr - 20kr = \underline{5.980kr}$$

Samlende rentes:

$$6000kr + 5980kr + 5960kr + \dots + 20kr$$

$$= \frac{6000 + 20}{2} \cdot 300 = 3010kr \cdot 300$$

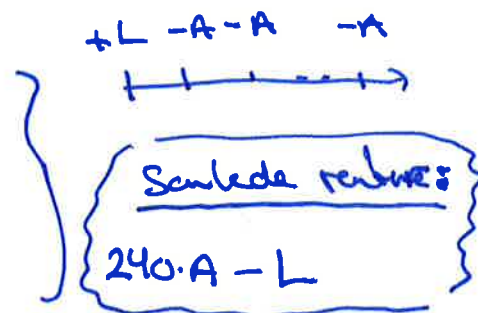
$$= \underline{\underline{903.000kr}}$$

Oppg. 1.6.4

Annuitetslån : $L = 3.000.000kr$

Rente : 4,25% p.a. $\Rightarrow r = \frac{0,0425}{12}$

Ant. terminer: $n = 20 \cdot 12 = 240$



$$A = \frac{L \cdot r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = \frac{3.000.000 \cdot \frac{0,0425}{12} \cdot (1 + \frac{0,0425}{12})^{240}}{(1 + \frac{0,0425}{12})^{240} - 1}$$

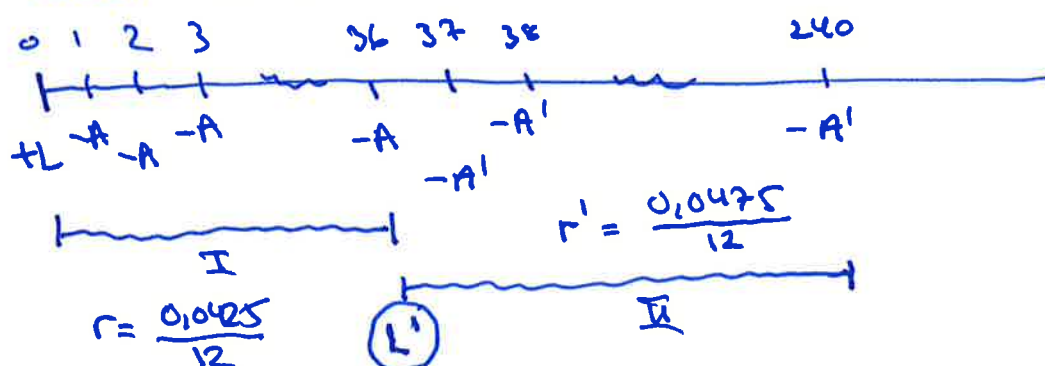
$$\approx \underline{\underline{18.577,03kr}}$$

Samlede rentes: $240 \cdot 18.577,03kr - 3.000.000kr$

$$\approx \underline{\underline{1.458.487,91kr}}$$

Oppg. 1.6.5:

Lån som ovenfor, men renten øker til 4,75% etter tre år.



Finns nytt termabelop: A'

Finns først sluttverdi for lån I, ved $t=36$.

$$\begin{aligned} \text{Sluttverdi: } & L \cdot (1+r)^{36} - A \cdot (1+r)^{35} - A \cdot (1+r)^{34} \dots - A \\ & = \underbrace{\left(L - \frac{A}{1+r} - \frac{A}{(1+r)^2} - \dots - \frac{A}{(1+r)^{35}} \right)}_{\text{nåverdi}} \cdot (1+r)^{36} \end{aligned}$$

$$= \left(L - \frac{A \cdot ((1+r)^{36} - 1)}{r \cdot (1+r)^{36}} \right) \cdot (1+r)^{36}$$

$$r = \frac{0,0425}{12} \quad \rightarrow \quad = \left(3.000.000 \text{ kr} - \frac{18.577.036 \cdot ((1+r)^{36} - 1)}{r \cdot (1+r)^{36}} \right) \cdot (1+r)^{36}$$

$$= \underline{\underline{2.695.250,34 \text{ kr} = L'}}$$

$$\text{Nytt termabelop: } A' = \frac{L' \cdot r' \cdot (1+r')^{240-36}}{(1+r')^{240-36} - 1}$$

$$L' = 2.695.250,34 \text{ kr}$$

$$r' = 0,0475/12$$

$$n = 240 - 36 = 204$$

$$\approx \underline{\underline{19.281,35 \text{ kr}}}$$

1.6.4:

$$L = 3.000.000 \text{ kr}$$

$$n = 240$$

$$r = \frac{0,0425}{12}$$

Serielin:

Avdrag: $\frac{L}{n} = \frac{3.000.000}{240} = \underline{12.500 \text{ kr}}$

Renter: $R_1 = 3.000.000 \cdot 0,0425/12$
 $= \underline{10.625 \text{ kr}}$

$$R_2 = (3.000.000 - 12.500) \cdot \frac{0,0425}{12}$$

$$= 10.625 - 44,27$$

$$= \underline{10.580,73 \text{ kr}}$$

⋮

Seriede renter: $10.625 \text{ kr} + 10.580,73 \text{ kr} + \dots + 44,27 \text{ kr}$

$$= \frac{10.625 + 44,27}{2} \cdot 240 = \underline{\underline{1.280.312,50 \text{ kr}}}$$

② Vendelig rekke:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Geometriske rekke:

Hvis $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ er en uendelig geometrisk rekke med kvotient k (dvs $\frac{a_2}{a_1} = k$, $\frac{a_3}{a_2} = k$, ...) så har vi:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1}{1-k}, & -1 < k < 1 \\ \text{finst ikke}, & \text{ellers} \end{cases}$$

Hva betyr egentlig $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$?

Delsum: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Grenseverdi: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ← hva skjer med uttrykket S_n når $n \rightarrow \infty$

Ek: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

← uendelig geometrisk $k = \frac{1}{2}$

n	1	2	3	4
S_n	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{15}{8}$
		"	"	"
		1.5	1.75	1.875

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$S_n = 1 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\leftarrow a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$

$$= \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$= 2 \cdot (1 - (\frac{1}{2})^n) = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$= 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$S_4 = 2 - \frac{1}{8} = 1.875$$

Grenseverdi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 2 \leftarrow$$



Vi kan få $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ så nært 2 vi vil ved å velge n stor nok

Vendings- rekke: $a_1 + a_2 + \dots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Defn: Hvis grenseverdien $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ eksisterer, så sier vi at rekken konvergerer og at grenseverdien S er summen av rekken.

Hvis grenseverdien $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ikke eksisterer, sier vi at rekken divergerer.

Ex: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty$ divergent
rekke
($\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$)

Ex: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ divergent
$$S_n = \begin{cases} 0, & n \text{ partall} \\ 1, & n \text{ oddetall} \end{cases}$$

Uendelige geometriske rekker

Hvis $a_1 + a_2 + \dots$ er uendelig geometrisk rekke med kvotient k , så har vi:

- * Rekken konvergerer for $-1 < k < 1$ med sum $S = \frac{a_1}{1-k}$
- * Rekken divergerer ellers.

Uendelige etterskuddsannuiteter:



Nåverdi: $\frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \dots$

$$= \frac{A}{1+r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}}$$

$$= \frac{A}{(1+r) - 1} = \underline{\underline{\frac{A}{r}}}$$

← annuiteten
← diskonteringsrate

Uendelig geometrisk
række, $k = \frac{1}{1+r}$

Konvergent: $k < 1$

Eks: $A = 10.000 \text{ kr}$
 $r = 10\% = 0,10$ } nåverdi: $\frac{10.000 \text{ kr}}{0,10} = \underline{\underline{100.000 \text{ kr}}}$

③ Kontinuerlig forrentning

Eulers tall: $e = 2,71828\dots \approx \underline{\underline{2,72}}$

Kapitalisering n ganger per år: (r rente p.a. nominelt)

$n=1$:	vektfaktor	$1+r$
$n=12$:	— " —	$(1+r/12)^{12}$
$n=360$:	— " —	$(1+\frac{r}{360})^{360}$

↓
n → ∞:
 $(1 + \frac{r}{n})^n$

Kontinuerlig forrentning: Renten kapitaliseres "hele tiden"

Dvs: Vektfaktor $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{r}{n})^n = e^r}$

Eks: $r = 10\% = 0,10$

$$e^r = 2,718^{0,10}$$

$$\approx 1,1052$$

Kalk: $0,10 \left[\frac{x}{e^x} \right] \leftarrow \text{rad} = 1$

Årlig kapitalisering: $1,10$

Mnd. — — — : $\left(1 + \frac{0,10}{12}\right)^{12}$

$$\approx 1,1047$$

Dgl. — — — :

$$\left(1 + \frac{0,10}{360}\right)^{360}$$

$$\approx 1,1052$$

$n = 1.000.000$:

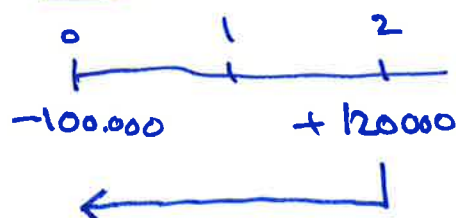
$$\approx 1,1052$$

Kontinuerlig forrentning:

Doktor velthetenes e^r

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

Anvendelse: Nåverdi beregning med kontinuerlig forrentning.



Nåverdi: $-100.000 + \frac{120.000}{(1+r)^2}$

Nåverdi med kontinuerlig forrentning:

$$-100.000 + \frac{120.000}{(e^r)^2}$$

$$= -100.000 + \frac{120.000}{e^{2r}}$$

$r = 10\% = 0,10 \rightarrow$

$$-100.000 + 120.000 \cdot e^{-2r}$$

$$\approx -1.752 \text{ kr}$$

Nåverdi ved kontinuerlig forrentning ved rente r :

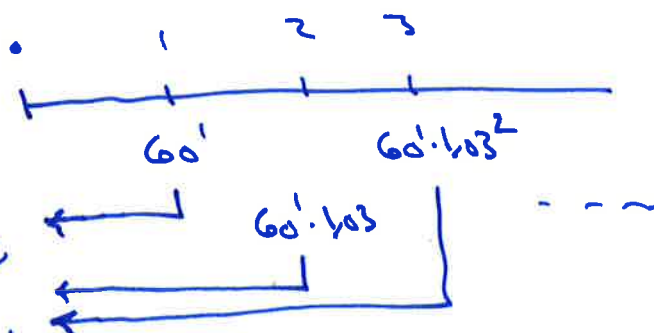
En innbetaling I om n år har nåverdi

$$\frac{I}{(e^r)^n} = I \cdot e^{-rn}$$

Ek:

Investering:

Tilbakebetaling på
60.000 kr etter ett år,
og direkte eller
tilb. betaling med
3% i året uten skat.



Nåverdi:

Diskonteringsrente 10%.

geometrisk
 $k = \frac{1.03}{1.10}$

$$\frac{60.000}{1,10} + \frac{60.000 \cdot 1,03}{1,10^2} + \frac{60.000 \cdot 1,03^2}{1,10^3} + \dots$$

$$= a_1 \cdot \frac{1}{1-k} = \frac{60.000}{1,10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1,03}{1,10}} = \frac{60.000}{1,10 - 1,03}$$

$$= \frac{60.000}{0,07} \approx \underline{\underline{857.143 \text{ kr}}}$$