

FORELESNING 5

EIVIND ERIKSEN

SEP 21, 2017

MET1180

MATEMATIKK

Plan:

- ① Lineære og kvadratiske likninger
- ② Likninger med parametre
- ③ Polynomlikninger og polynomdivisjon

Pensum:

[EJ 2.1-2.5]

Polynomdivisjon
neste gang

Merke:

- a) Forelesning fredag 11-14.
- b) Innleveringsoppgave 1.

① Lineære og kvadratiske likninger

Et lineært uttrykk er et uttrykk på formen $ax+b$,
der a, b er gitt tallet. Ex: $2x+3$
Kaller et førstegrads uttrykk hvis $a \neq 0$.

Lineær løsning: Begge sider er lineære uttrykk.

Ex:

$$\begin{aligned} 2x+3 &= x-7 \\ 2x-x &= -7-3 \\ x &= \underline{-10} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1} \quad | \cdot x \cdot (x+1)$$

$$\frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \cdot (\cancel{x+1}) = \frac{2}{\cancel{x+1}} \cdot x \cdot (\cancel{x+1})$$

$$\begin{aligned} x+1 &= 2x \\ x &= \underline{1} \end{aligned}$$

Kvadratisk uttrykk: $ax^2 + bx + c$ (med $a \neq 0$)
(andregradsuttrykk)

Kvadratisk likning:
(andregradslikning) Begge sider er kvadratiske uttrykk, eller en side kvadratisk og en side linear.

Ex: $x^2 + 1 = 3x^2 - 4$
 $-2x^2 + 5 = 0$

$x^2 + 1 = 2x$
 $x^2 - 2x + 1 = 0$

Alle kvadratiske lkn. kan skrives på std. form
Som $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$, der a, b, c er gitte tall.

Abs-formelen:

Løsningene av $ax^2 + bx + c = 0$ er gitt ved
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ex: $-2x^2 + 5 = 0$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 + 40}}{2 \cdot (-2)}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{40}}{-4} = \pm \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{4}}{-4}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad x_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$x = 1$ (dobbelrot)

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1$

Ex: $-2x^2 + 5 = 0$
 $-2x^2 = -5$
 $x^2 = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$
 $x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$

$x^2 = k$ har løsn:

$x = \pm \sqrt{k}$, $k \geq 0$
 ingen løsn, $k < 0$

Ex: $x^2 - 4x = 0$
 $x \cdot (x - 4) = 0$
 $x = 0$ eller $x - 4 = 0$
 $x = 4$

$u(x) \cdot v(x) = 0$

har løsnene

$u(x) = 0$ eller $v(x) = 0$

Fullføring av kvadrater:

$x^2 + 8x + \dots = (ax + b)^2$

finn en konstant slik
Summen er et kvadrat.

$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$
 $\begin{matrix} \nearrow & \nearrow \\ x^2 & + & 2px & + & p^2 \end{matrix}$

Velg: $2p = 8$
 $p = \frac{8}{2}$
 $= 4$

$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

"halvere, kvadrere,
addere"

Ex:

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = -15 + 16$$

$$(x-4)^2 = 1$$

$$x-4 = \pm \sqrt{1}$$

$$x-4 = \pm 1$$

$$x = 4 \pm 1$$

$$\underline{x=5} \text{ eller } \underline{x=3}$$

$$x^2 = k$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pm \sqrt{k}$$

løse annengrads-
likninger ved å
fullføre kvadrat.

Viète's formel:

Hvis en annengradslikning har løsninger x_1, x_2
så kan den skrives

$$(x-x_1) \cdot (x-x_2) = 0$$

$$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 x + x_1 x_2 = 0$$

$$x^2 - (x_1+x_2) \cdot x + x_1 x_2 = 0$$

For eksempel: $x=3, x=5$ er løsn $\Rightarrow (x-3)(x-5)=0$

$$x^2 - 3x - 5x + 15 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

Viète's formel

Likning $x^2 - px + q = 0$ har løsn $x=x_1$ og $x=x_2$

$\Uparrow$

$$x_1 + x_2 = p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Eks:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x = \underline{3}, x = \underline{4}$$

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 \cdot x_2 = 12$$

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$x = \underline{-3}, x = \underline{-4}$$

$$x_1 + x_2 = -7$$

$$x_1 \cdot x_2 = 12$$

Hush:

$$x^2 - px + q = 0$$

Eks:

$$-2x^2 + 5 = 0$$

$$\leftrightarrow x^2 = 5/2$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{40}}{-4} = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

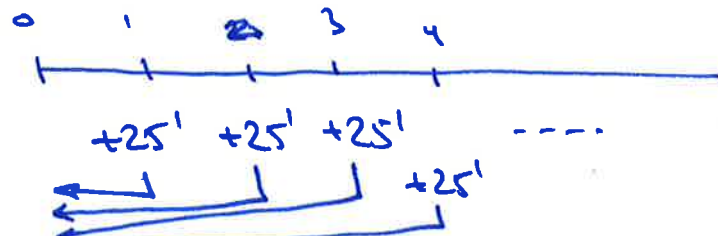
$$= \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\pm \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{-4^2}$$

$$\begin{aligned} 40 &= 4 \cdot 10 \\ \sqrt{40} &= \sqrt{4 \cdot 10} \\ &= 2 \cdot \sqrt{10} \end{aligned}$$

Svarene er
de samme!

Oppg. 1.8.7.



Uendelig etterskudds annuitet.

Nåverdi:

$r = 10\%$, Kontinuerlig forrentning
 $\downarrow$
 $e^r = e^{0.10}$

$$\frac{25.000}{e^{0.10}} + \frac{25.000}{(e^{0.10})^2} + \frac{25.000}{(e^{0.10})^3} + \dots$$

$$= a_1 \cdot \frac{1}{1-k} = \frac{25.000}{e^{0.10}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{0.10}}}$$

$$= \frac{25.000}{e^{0.10} - 1} = 25.000 \cdot \frac{1}{e^{0.10} - 1}$$

Uendelig geometrisk rekke

$$k = \frac{1}{e^{0.10}} = e^{-0.10}$$

$$\approx \underline{\underline{237.708,30 \text{ kr}}}$$

Faktorisering av andreggradsuttrykk.

$$ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

= ? faktorisering i lineære faktorer.

Ekse: $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ kvadratisk.
 $= (x+2) \cdot (x+2)$

$$x^2 + 4x + 3 = ? (-x + -) \cdot (-x + -)$$

$$= (x+b) \cdot (x+c)$$

Metode:

$$x^2 - px + q = 0$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\underline{x = -1, x = -3}$$

$$(x - (-1)) \cdot (x - (-3)) = 0$$

$$(x+1) \cdot (x+3) = 0$$

$$x+1=0 \quad \text{eller} \quad x+3=0$$

$$x=-1 \quad \quad \quad x=-3$$

||

$$\underline{x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)}$$

Metode for å faktorisere ax^2+bx+c :

① Løser ligningen $ax^2+bx+c=0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

② Tre tilfeller:

i) $\Delta = b^2-4ac > 0$: To ulike løsninger $x_1 \neq x_2$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

diskriminant =
uttrykk under
kvadratroten

ii) $\Delta = b^2-4ac = 0$:

En dobbelrot $x_1 = x_2$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

iii) $\Delta = b^2-4ac < 0$:

Ingen løsninger.

③ Faktoriseringen blir:

i) $\Delta > 0$: $ax^2+bx+c = a(x-x_1) \cdot (x-x_2)$

ii) $\Delta = 0$: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$

iii) $\Delta < 0$: ax^2+bx+c kan ikke faktiseres i lineær faktorer.

Eq: $x^2 + 7x + 10$ ~~xxxxxxxxxx~~

Metode: $x^2 + 7x + 10 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4}{2} = \underline{-2}, \quad x_2 = \frac{-10}{2} = \underline{-5}$$

||

$$x^2 + 7x + 10 = \underline{\underline{(x+2) \cdot (x+5)}}$$

Eq: $2x^2 + 8x + 14 = \underline{\underline{2 \cdot (x^2 + 4x + 7)}}$

↓

$$2x^2 + 8x + 14 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 8 \cdot 14}}{4}$$

ingen løsn.

Eq: $3x^2 - 12x + 12 = \underline{\underline{3 \cdot (x-2)^2}}$

$$3x^2 - 12x + 12 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{12 \pm 0}{6} = \underline{2} \text{ (dobbelrot)}$$

↑

② Likninger med parametre

$\left\{ \begin{array}{l} \text{variable} \\ \text{parametre} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{(endogene)} \\ \text{(exogene)} \end{array} : \left\{ \begin{array}{l} \text{vi bestemmer} \\ \text{variabler ved å} \\ \text{lese løsning} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{variable} \\ \text{parametre} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{(endogene)} \\ \text{(exogene)} \end{array} : \left\{ \begin{array}{l} \text{verdier på parametre} \\ \text{bestemmes "utenfra".} \end{array} \right.$

Ek: Vi selger en vare for $p = 5$ kr per enhet.

$$I(x) = p \cdot x = 5x$$

← Inntektsfunksjon,
inntekt ved å
selge x enheter
($x \geq 0$)

$$K(x) = 500 + 4x - 0,04x^2$$

← Kostnadsfunksjon,
kostnad ved å
produsere x
enheter.
($x \geq 0$)

$$\begin{aligned}
 \pi(x) &= I(x) - K(x) \\
 &= 5x - (500 + 4x - 0,04x^2) \\
 &= 0,04x^2 + \cancel{4x} - 500
 \end{aligned}$$

$$\underline{\pi(x) = 0} : 0,04x^2 + x - 500 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0,04 \cdot (-500)}}{2 \cdot 0,04}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{0,08} = \frac{-1 \pm 9}{0,08} = \frac{8}{0,08}$$

$$x = \underline{100} \quad (\text{break-even})$$

Med p:

$$I(x) = px$$

$$K(x) = 500 + 4x - 0,04x^2$$

$$\begin{aligned} \pi(x) &= px - (500 + 4x - 0,04x^2) \\ &= 0,04x^2 - 4x + px - 500 \\ &= 0,04x^2 + (p-4)x - 500 \end{aligned}$$

x variabel
p parameter

x kan vi
bestemme i
modellen

p kommer utvirket
modellen

||

Matematisk:

Vi løser likning
for variabelen.

Sworet avhenger
av parameteren.

$$0,04x^2 + (p-4)x - 500 = 0$$

$$x = \frac{-(p-4) \pm \sqrt{(p-4)^2 - 4 \cdot 0,04 \cdot (-500)}}{2 \cdot 0,04}$$

$$= \frac{\pm \sqrt{(p-4)^2 + 80} - (p-4)}{0,08}$$

$$x = \frac{\sqrt{(p-4)^2 + 80} - (p-4)}{0,08}$$

$$p=6: \quad x = \frac{\sqrt{84} - 2}{0,08} \approx 89,6$$

$$\Rightarrow \underline{x=90}$$

③ Polynomlikninger

Et monom er et uttrykk ax^n , der $a \neq 0$
er et gitt tall og $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ (grad n)

Ex: $2x^3$ x^2 $5x = 5 \cdot x^1$ $-2 = -2 \cdot x^0$

Et polynom er en sum av monomer.

Ex: $2x^3 - x^2 + x + 1$ $\leftarrow$ graden til polynomet = 3
(høyeste grad levert monomer)

En polynomlikning av grad n : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Begge sider er} \\ \text{polynomer av grad} \\ \leq n. \end{array} \right.$

Ex: $x^2 + 3x + 2 = 0$ andregradlikning
= grad 2

$x^3 - 2x + 1 = 0$ tredjegradslikning

Løsning av polynomlikninger av grad ≥ 3 :

Ex: $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$
 $x(x^2 - 4x + 3) = 0$

$x=0$ eller $x^2 - 4x + 3 = 0$
 $x=3$, $x=1$

Eqn: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

← Variabelsubstitusjon:

$$u^2 - 7u + 12 = 0$$

$$u = x^2$$

$$u = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12}}{2}$$

$$= \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$u = 3 \text{ eller } u = 4$$

$$\underline{x^2 = 3} \text{ eller } \underline{x^2 = 4}$$

$$\underline{x = \pm \sqrt{3}} \text{ eller } \underline{x = \pm 2}$$

$$\underline{\underline{x = \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2, -2}}$$

Merke: En n 'te-gradslikning har n eller færre løsninger. Løsninger som "mangler" = kvadratrøtter av neg. tall

Fånn formel for 3. og 4. gradslikninger, men ikke for $n \geq 5$.