

FORELESNING 6

EIVIND ERIKSEN

SEP 22, 2017

MET1180

MATEMATIKK

Plan:

- ① Polynomdivisjon
- ② Polynomlikninger og faktorisering
- ③ Radikale likninger
- ④ Ulikheter

Perus:

[E] 2.5-2.7,
2.8

① Polynomdivisjon:

Ex:
$$\frac{x^2 + 7x + 3}{x+1} = x+6 + \frac{-3}{x+1}$$

$$\begin{array}{r} (x^2 + 7x + 3) : (x+1) = x+6 \\ - (x^2 + x) \\ \hline 6x + 3 \\ \cdot 6x + 6 \\ - (6x + 6) \\ \hline -3 \leftarrow \text{Rest} \end{array}$$

↑
Kvotient

Ex:

$$\begin{array}{r} 156 : 6 = 26 \\ \underline{12} \\ 36 \\ \underline{36} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{156}{6} = 26 + \frac{0}{6}$$

$$\frac{x^2 + 7x + 3}{x+1} = x+6 + \frac{-3}{x+1} \iff x^2 + 7x + 3 = (x+6) \cdot (x+1) - 3$$

↑
x-a
med
a=-1
Setter inn x=-1

$$-3 = (-1) \cdot 0 + (-3)$$

Ekse: $x^3 - 7x^2 + x - 1 : x - 3 = ?$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $x=3$ gir $27 - 63 + 2$ $x=3$
 $= 29 - 63$
 $= -34$
 $\parallel$

Rest i divisjonen

$$\frac{x^3 - 7x^2 + x - 1}{x - 3} = q(x) + \frac{r}{x - 3} \Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + x - 1 = q(x) \cdot (x - 3) + r$$

$\downarrow$ $x=3$
 $-34 = \cancel{q(3) \cdot 0} + r$

$$(x^3 - 7x^2 + x - 1) : (x - 3) = x^2 - 4x - 11$$

$$\begin{array}{r}
 - (x^3 - 3x^2) \\
 \hline
 -4x^2 + x - 1 \\
 - (-4x^2 + 12x) \\
 \hline
 -11x - 1 \\
 - (-11x + 33) \\
 \hline
 -34
 \end{array}$$

$$\frac{x^3 - 7x^2 + x - 1}{x - 3} = x^2 - 4x - 11 + \frac{-34}{x - 3}$$

Konklusjon:

Hvis $f(x)$, $g(x)$ er polynomer, så $f(x) : g(x)$ en
 kvotient $q(x)$ og rest $r(x)$ slik at

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

$$\boxed{\text{grad } r(x) < \text{grad } g(x)}$$

for entydige polynomer $q(x)$ og $r(x)$ med $\text{grad } r(x) < \text{grad } g(x)$.

Ekse:
$$\begin{array}{r} x^3 : (x^2+1) = x \\ -(x^3+x) \\ \hline -x \leftarrow \text{Rest} \end{array}$$

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x + \frac{-x}{x^2+1}$$

Polynomdivisjon og ~~test~~ løsning av ligninger.

Ekse: $x^3 - 2x + 1 = 0$

$x=1$: $1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$
ok, $x=1$ er en løsn.

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x + 1) : (x-1) = x^2 + x - 1 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline x^2 - 2x + 1 \\ -(x^2 - x) \\ \hline -x + 1 \\ -(-x + 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x-1} = x^2 + x - 1 \iff x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1)$$

Løsningsmetoder:

i) faktorisering av $x^3 - 2x + 1$:

ii) variabelsubstitusjon
 $u = x^2$ eller $u = x^3$

iii) Heltallsløsninger
kan kun være heltall
Så går opp i
konstantleddet 1:

$$x = \pm 1 \text{ ok.}$$

$$f(x) = 0 \text{ har løsning } x = a$$

$\Uparrow$

$$f(x) = (x-a) \cdot g(x)$$

←

$$g(x) = \frac{f(x)}{x-a}$$

$\Uparrow$

$$f(x) : x-a \text{ har rest } f(x) = 0$$

Ex: $x^3 - 2x + 1 = 0$

① $x = \pm 1$: $x = 1$ er løsn.

② $x^3 - 2x + 1 = (x-1) \cdot g(x)$, $g(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x-1}$
 $= \underbrace{(x-1) \cdot (x^2 + x - 1)} = 0$ $= x^2 + x - 1$

$x = 1$ eller $x^2 + x - 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ekse: $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$ ← setter $u = x^3$

$$u^2 - 7u + 6 = 0$$

$$u = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}$$

$$u = 6 \text{ eller } u = 1$$

$$x^3 = 6 \text{ eller } x^3 = 1$$

$$x = \sqrt[3]{6}$$

$$x = 1$$

$$x^6 - 7x^3 + 6 = u^2 - 7u + 6 = (u-6)(u-1) \\ = (x^3-6) \cdot (x^3-1)$$

$x^3 - 1$: $x^3 - 1 = 0$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1$$

$$x^3 - 1 = (x-1) \cdot \underline{\quad ? \quad}$$

$$\underline{x^3 - 1} : \underline{x - 1} = x^2 + x + 1$$

$$-(x^3 - x^2)$$

$$x^2 - 1$$

$$-(x^2 - x)$$

$$x - 1$$

$$x - 1$$

$$0$$

$$x^3 - 1 = 0$$

$$(x-1) \cdot (x^2 + x + 1) = 0$$

$x = 1$ eller $x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

ingen løsn.

Algebraens fundamentalsetning:

Enhvert polynom $a_n \cdot x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$
av grad n kan faktoriseres i lineære faktorer

og irreducibele kvadratiske faktorer (kvadratiske faktorer som ikke kan faktoriseres i lineære faktorer)

Ekse: $x^3 - 1 = \underbrace{(x-1)}_{\text{linear}} \cdot \underbrace{(x^2+x+1)}_{\text{irr. kvadratisk faktor.}}$

$$x^3 - 1 = 0 \quad (x-1) \cdot (x^2+x+1) = 0$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $x=1$ ingen løsn

$$x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

$$x^3 - x = 0 \quad \underline{x=0} \quad \underline{x=1} \quad \underline{x=-1}$$

Irreducibel kvadratisk faktor:

Kvadratisk $ax^2 + bx + c$ slik at $\Delta = b^2 - 4ac < 0$,

Sånn betyr: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ingen løsn. (kvadratroten av negativt tall)

$\Updownarrow$

$ax^2 + bx + c$ kan ikke faktoriseres i lineære faktorer.

② Andre likninger:

* Rasjonale likninger:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

rasjonalt uttrykk: brøk
av polynomer

Ekse: $\frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$

$$x+1 = 2x$$

$$\underline{1 = x}$$

$$1 \cdot x(x+1)$$

pass på at
nevner $\neq 0$

Ekse: $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{x}$ $1 \cdot x(1+x)$

$$x^2 = x+1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \underline{\underline{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}}$$

Metode: Multipliserer med
fellesnevner.

* Radikale likninger: Likninger med rotuttrykk i x

Ekse: $1 - \sqrt{x} = x - 3$ $|-1$

$$-1 \neq 1$$

$$(-\sqrt{x} = x - 4) \quad | ()^2$$

$$\begin{array}{l} (-1)^2 \quad |^2 \\ \hline 1 = 1 \end{array}$$

$$(-\sqrt{x})^2 = (x - 4)^2$$

$$x = x^2 - 8x + 16$$

$$0 = x^2 - 9x + 16$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 16}}{2}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

~~$$x_1 = \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \approx 6,5$$~~

falsk
løs.

$$x_2 = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \approx 2,4$$

løn.

Metode:

Sett
prøve
på å løse.
Her vi
kvadrerer
begge
sides.

Eq: $2 - \sqrt{x} = \sqrt{2-x}$

$$(2 - \sqrt{x})^2 = 2 - x$$

$$4 - 4\sqrt{x} + x = 2 - x$$

$$2x + 2 = 4\sqrt{x}$$

$$(2x + 2)^2 = 16x$$

$$4x^2 + 8x + 4 = 16x$$

$$4x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$(2x - 2)^2 = 0$$

$$2x - 2 = 0$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

$$|(-)^2$$

$$VS: 2 - \sqrt{1} = 1$$

$$HS: \sqrt{2-1} = 1$$

ok.

$$|(-)^2$$

prove

④ Ulikheter.

$\swarrow$ lineære
 $\searrow$ andre

Ulikhetstegn:

$<$	$\leq$
$>$	$\geq$

* Lineære ulikheter:

Ex:

$$2x+3 < x-5 \quad | -x$$

$$2x-x+3 < -5 \quad | -3$$

$$x < -5-3$$

$$\underline{\underline{x < -8}}$$

$$\underline{\underline{(-\infty, -8)}}$$

Intervallskrivning:

$$x \in [a, b] : a \leq x \leq b$$

$$x \in (a, b) : a < x < b$$

$$(2, \infty)$$

$$x > 2$$

$$(2, \rightarrow)$$

$$\langle a, b \rangle$$

Eks:

$$x - 1 > 3x + 5 \rightarrow$$

$$x - 3x > 5 + 1$$

$$-2x > 6$$

$$\frac{-2x}{-2} < \frac{6}{-2}$$

$$x < -3$$

$$\underline{\underline{}}$$

$$\underline{\underline{(-\infty, -3)}}$$

$$-1 - 5 > 3x - x$$

$$\frac{-6}{2} > \frac{2x}{2}$$

$$-3 > x$$

$$\underline{\underline{x < -3}}$$

Husk: * hvis mult. / divideres med et negativt tall (eller et uttrykk med negativ verdi) må vi snu ulikhet

* løsninger er oftast intervaller

Anne uttrykk:

kvadratisk

Eq: $x^2 - 6x - 7 > 7$

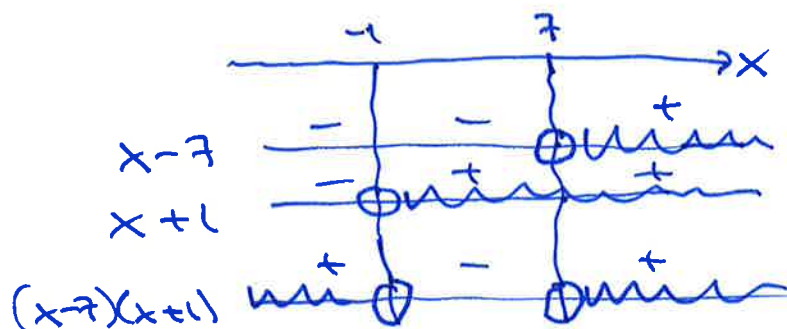
$$x^2 - 6x - 7 > 0$$

$$(x-7)(x+1) > 0$$

Fortegnsskye:

* flytt alle ledd
til samme side,
og faktorisér
uttrykket

* setter opp
fortegnsskye:



Løsning: $x < -1$ eller $x > 7$

$$L = (-\infty, -1) \cup (7, \infty)$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 8}{2}$$

$$x = 7, x = -1$$

$$x^2 - 6x - 7 =$$

$$(x-7)(x+1)$$

0 : null

++ : +

-- : -

$\cup$ = union, betyr
at begge
intervallene er
løsninger.

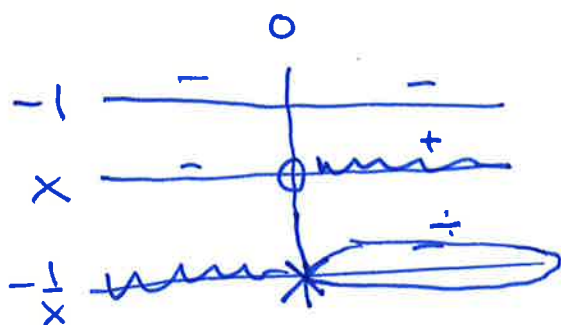
Ees:

$$\frac{x-1}{x} \leq 1$$

$$\frac{x-1}{x} - 1 \leq 0$$

$$\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x} \leq 0$$

$$\frac{-1}{x} \leq 0$$



$$\underline{\underline{x > 0}}$$

$$\underline{\underline{L = (0, \infty)}}$$

Alt.:

$-x \rightarrow$

$x-1 ? x$

De ska utelukkes
for $x < 0$,
men ikke for
 $x > 0$.

0 : null

x : ikke definert

Eq: $x^3 - x + 1 = 0$

$x = u + v$: Cardanos trick

$(u+v)^3 - (u+v) + 1 = 0$

$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - (u+v) + 1 = 0$

$(u^3 + v^3 + 1) + (u+v)(\cancel{3u^2v} + \cancel{3uv^2} - 1) = 0$

$u^3 + v^3 + 1 = 0 \quad \text{og} \quad \cancel{3u^2v} + \cancel{3uv^2} - 1 = 0$
 $3uv = 1$

Løsning: $3uv = 1 \Rightarrow v = \frac{1}{3u}$

$u^3 + v^3 = -1 \Rightarrow u^3 + \left(\frac{1}{3u}\right)^3 = -1$

$u^3 + \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{u^3} = -1 \quad | \cdot u^3$

$u^6 + \frac{1}{27} = -u^3$

$u^6 + u^3 + \frac{1}{27} = 0$

$u^3 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{27}}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}$

$u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}}$

$v^3 = -1 - u^3$

$= -\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}} \Rightarrow v = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}}$

$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} \approx -1,3247$

Mulige heltallige løsn:

± 1 : $x = 1$ ikke løsn.
 $x = -1$ ikke løsn

||
ingen heltallsløsninger

Likninger $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$)
kan løses ved en formel (algebraisk uttrykk) i
koeff. $a_n, \dots, a_1, a_0$ for $n=3$ (Cardanos formel)
og $n=4$. Formlene er tilsvarende abe-formelen,
men mye mer komplisert (se vi ser fra els. på
første side).

For $n \geq 5$, har den norske matematikeren Abel
bevist at det ikke finnes noen slik formel.