BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

FORELESNING 7

MET 1180

EIVIND ERIKSEN SEP 28, 2017 MATEMATIKK

Plan:

① Oppgaveregning: Finansmatematikk, likninger og ulikheter

② Funksjoner ← Neste uke

Pensum:

[E] 3.1

Påminnelse: Innleveringsoppgave I
Frist fredag 06/10 kl 12.

① Oppgaver:

Eksamen: Flervalgseksamen 11/2015, Oppg. 1–8.

I. Balanse 31/12/2003:

$$500.000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0325}{2}\right) = 508.125 \text{ kr}$$

Balanse 1.000.000 kr:

$$508.125 \cdot 1{,}0325^x = 1.000.000$$

$$1{,}0325^x = \frac{1.000.000}{508.125}$$

Riktig svar: D fordi

$$508.125 \cdot 1{,}0325^{21} < 1.000.000$$
$$508.125 \cdot 1{,}0325^{22} > 1.000.000$$

Med logaritmer:

$$1{,}0325^x = \frac{1000000}{508125}$$

$$x \cdot \ln 1{,}0325 = \ln(1000000/508125)$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{1000000}{508125}\right)}{\ln(1{,}0325)} \simeq 21{,}17$$

$$\Downarrow$$

$$x = 22$$

$$\longrightarrow \quad (x \simeq 21{,}17)$$

BI HANDELSHØYSKOLEN

Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo

Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500

www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

2.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline & & +50' & +50' & +50' \;\; \cdots \end{array} \qquad r = 0{,}08$$

Nåverdi: $\frac{50.000}{1{,}08^2} + \frac{50.000}{1{,}08^3} + \ldots$ ← uendelig geometrisk $k = \frac{1}{1{,}08}$

$$= \frac{50.000}{1{,}08^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1{,}08}}$$

$$= \frac{50.000}{1{,}08 \cdot (1{,}08 - 1)} = \frac{50.000}{1{,}08 \cdot 0{,}08} = \underline{578.703{,}70 \text{ kr}}$$

Riktig svar: c.

Alternativ: Formel for etterskuddsannuitet

Verdi ved $t=1$: (diskonterer tilbake til $t=1$)
$\Downarrow$
kan bruke formel for std. uendelig etterskudds-annuitet

$$\frac{A}{r} = \frac{50.000}{0{,}08} = \underline{625.000}$$

Nåverdi, $t=0$: $\frac{625.000}{1{,}08} \approx \underline{578.704 \text{ kr}}$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

3.

$$S(x) = \underbrace{3}_{a_1} + \underbrace{x}_{a_2} + x^2/3 + \dots$$

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{x}{3}$$

Konvergent $\Leftrightarrow$ $-1 < k < 1$, $S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k}$

$$-1 < \frac{x}{3} < 1 \quad | \cdot 3$$

$$-3 < x < 3$$

$x = 2$: rekken konvergent

$$S(2) = 3 \cdot \frac{1}{1 - 2/3} = \frac{3}{1/3} = 9$$

Riktig Alternativ: c

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

4.

0 1 2 3

+10' +10' +10' ---

kont. forrentning

r

$\Downarrow$

e^r

Nåverdi: $\frac{10.000}{e^r} + \frac{10.000}{(e^r)^2} + \cdots$

uend. geom. rekke

$k = \frac{1}{e^r}$

$$= \frac{10.000}{e^r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{e^r}}$$

$$= \frac{10.000}{e^r - 1} \leftarrow \frac{A}{e^r - 1}$$

std. formel for kont. etterskuddsrenn.

$$\frac{10000}{e^r - 1} = 60.000 \qquad | \cdot (e^r - 1)$$

$$\frac{10.000}{60.000} = \frac{\cancel{60.000}\,(e^r - 1)}{\cancel{60.000}}$$

$$\frac{1}{6} = e^r - 1$$

$$e^r = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6} \approx 1{,}17$$

$r = 0.14$: $e^r < 1{,}166$

$r = 0.16$: $e^r > 1{,}166$

$$\boxed{\text{Med logaritmer: } r = \ln(1{,}17) \approx 15{,}4\,\%}$$

$$\boxed{e^r = 1{,}166\ldots}$$

Riktig svar: D

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

5.

$$\frac{x-8}{x^2-3x-4} \geq 1$$

$$-1 \cdot \frac{x^2-3x-4}{x^2-3x-4}$$

$$\frac{x-8}{x^2-3x-4} - 1 \geq 0$$

$$\frac{(x-8)-(x^2-3x-4)}{x^2-3x-4} \geq 0$$

$$\frac{-x^2+4x-4}{x^2-3x-4} \geq 0$$

$$\frac{-(x-2)^2}{(x-4)(x+1)} \geq 0$$

Faktoriserer:

$$-x^2+4x-4=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{-2}=2$$

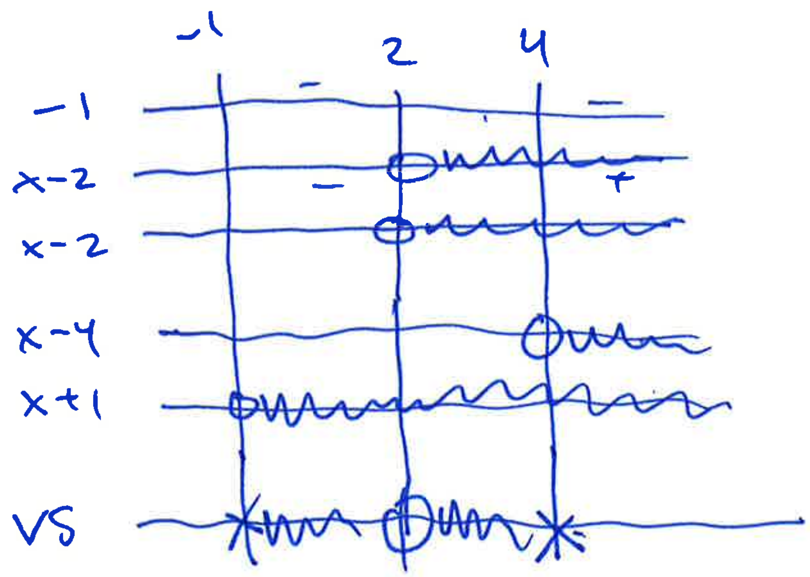
$$-(x-2)^2$$

$$x^2-3x-4=0$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}$$

$$=\frac{3\pm5}{2}=4,-1$$

$$(x-4)(x+1)$$



~~~ +
— −

0 = null
X = udef.

Løsning:

$$-1 < x < 4$$

Alt:

$$(-1, 4)$$

Riktig svar: A
~~~

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

6.

$$x^3 - 7x = 6$$

$$x^3 - 7x - 6 = 0$$

Polynomdivisjon med heltallskoeffisient:

heltallsløsning

$\Downarrow$

$x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

~~Test~~: $x = -1$: $-1 + 7 - 6 = 0$ ok.

$x = -1$ er løsn

$x + 1 = 0$

$$x^3 - 7x - 6 = (x+1) \cdot (x^2 - x - 6) = 0$$

$$(x^3 - 7x - 6) : (x + 1) = x^2 - x - 6$$
$$\underline{-(x^3 + x^2)}$$
$$-x^2 - 7x - 6$$
$$\underline{-(-x^2 - x \quad)}$$
$$-6x - 6$$
$$\underline{-6x - 6}$$
$$0$$

$$(x+1)(x^2 - x - 6) = 0$$

$x = -1$ eller $x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$x = 3$, $x = -2$

Riktig svar: D

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

7. $1-\sqrt{x} = \sqrt{x-5} \quad | \ (\ )^2$

$(1-\sqrt{x})^2 = \sqrt{x-5}^{\,2}$

$1-2\sqrt{x}+\cancel{x} = \cancel{x}-5$

$\frac{6}{2} = \frac{2\sqrt{x}}{2}$

$3 = \sqrt{x} \quad | \ (\ )^2$

$9 = x$

$\underline{x=9}$

Setter prøve:

VS: $1-\sqrt{9} = -2$

HS: $\sqrt{9-5} = 2$

falsk løsn.

Ingen løsning

Riktig svar: A

8. $f(x) = x^3 - ax^2 - 3x + 1$ nullpkt $\underline{x=2}$.

$\underline{x=2}$: $f(2) = 2^3 - a\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 1 = 0$

$8 - 4a - 6 + 1 = 0$

$\frac{3}{4} = \frac{4a}{4}$

$\underline{a = 3/4}$

$x=2$ løsn

$\Downarrow$

$x-2$ er faktor

$0 = x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 3x + 1 = (x-2)\cdot\left(x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}\right)$

$x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 3x + 1 : x-2 = x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

$-(x^3 - 2x^2)$

$\frac{5}{4}x^2 - 3x + 1$

$-\left(\frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x\right)$

$-\frac{1}{2}x + 1$

$-\left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$

0

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

$$(x-2)\cdot\left(x^2+\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}\right)=0$$

$\underline{x_1=2}$ eller $x^2+\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}=0 \quad |\cdot 4$

$$4x^2+5x-2=0$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot4(-2)}}{2\cdot4}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{25+32}}{8}=\frac{-5\pm\sqrt{57}}{8}$$

$$x_2=\frac{-5+\sqrt{57}}{8} \qquad x_3=\frac{-5-\sqrt{57}}{8}$$

$$x_2+x_3=\frac{-5}{8}+\frac{-5}{8}=\frac{-10}{8}=-\frac{5}{4}$$

Riktig svar: C

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

Oppgaver fra [E] Kap. 2

2.2.7 b) $x^2 - 7x + 12 = 0$

Viète's formel: $x^2 - px + q = 0$

$p = 7 \quad q = 12$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 7 \\ x_1 \cdot x_2 &= 12 \end{aligned}}$$

$x_1 = 3, \; x_2 = 4$

d) $x^2 + x - 2 = 0$

$x_1 + x_2 = -1$
$x_1 \cdot x_2 = -2$
$\Downarrow$
$x_1 = -2, \; x_2 = 1$

2.3.2 $2x^2 - sx + 8 = 0$

s: parameter
x: variabel

$$x = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2}$$

$$\boxed{x(s) = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 64}}{4}}$$

(s = 3:
$2x^2 - 3x + 8 = 0$
$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 64}}{4}$)

a) to løsn: $s^2 > 64$ $\quad s > 8$ eller $s < -8$
b) en løsn: $s^2 = 64 \longleftrightarrow s = \pm 8$
c) ingen løsn: $s^2 < 64$ $\quad s \in (-8, 8)$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

2.4.3 c) $x^5 - x^3 - 12x = 0$

$x \cdot (x^4 - x^2 - 12) = 0$

$\underline{x=0}$ eller $x^4 - x^2 - 12 = 0$ ← $\underline{u = x^2}$

$u^2 - u - 12 = 0$

$\boxed{\begin{matrix} u_1 + u_2 = 1 \\ u_1 \cdot u_2 = -12 \end{matrix}}$

$u = 4 \; , \; u = -3$

$x^2 = 4$ eller $x^2 = -3$

$\underline{x = \pm 2}$ ingen løsn.

Svar: $\underline{\underline{x=0, \; x=2, \; x=-2}}$

2.5.2 c)

$(3x^2 - 1) : (x - \frac{1}{3}) = 3x + 1$

$\underline{-(3x^2 - x)}$

$x - 1$

$\underline{-(x - \frac{1}{3})}$

$-2/3$

Rest $= \underline{\underline{-2/3}}$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

2.6.3. $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

Hvis $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ er heltall, er de eneste mulige heltallsløsninger de heltallene a slik at $a_0 : a$ går opp.

Metode:
Skriv ned alle faktorer i a_0 som er heltall, og sett inn i ligningen. Dette er de eneste heltallene som kan være løsning.

Eks: $x^3 + x^2 + 5x + 14 = 0$

$a_0 = 14 \rightarrow \pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$

$x = 1$: $21 \neq 0$
$x = -1$: $-1 + 1 - 5 + 14 \neq 0$
$x = -2$: $-8 + 4 - 10 + 14 = 0 \Rightarrow x = -2$ er løsning

$x + 2 = 0$

$x^3 + x^2 + 5x + 14 = (x+2)\cdot(x^2 - x + 7) = 0$

$x = -2$ eller

$(x^3 + x^2 + 5x + 14) : (x+2) = x^2 - x + 7$
$-(x^3 + 2x^2)$
$\quad -x^2 + 5x + 14$
$\quad -(-x^2 - 2x)$
$\quad\quad 7x + 14$
$\quad\quad 7x + 14$
$\quad\quad\quad 0$

$x^2 - x + 7 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 28}}{2}$

ingen løsn.

Løsn: $x = -2$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

2.6.4. a) $x^4 - 4x^2 + 3 = ?$ Finn faktorisering.

$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$: $u = x^2$

$u^2 - 4u + 3 = 0$

$u = 3, \ u = 1$

$x^2 = 3, \ x^2 = 1$

1. $u^2 - 4u + 3 = (u-3)(u-1)$

$x^4 - 4x^2 + 3 = (x^2-3)(x^2-1)$

$= (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-1)(x+1)$

2.

$x = \pm\sqrt{3}, \quad x = \pm 1$

$x = \sqrt{3}, \ x = -\sqrt{3}, \ x = 1, \ x = -1$

$x - \sqrt{3} = 0, \ x + \sqrt{3} = 0 \ x - 1 = 0, \ x + 1 = 0$

$x^4 - 4x^2 + 3 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-1)(x+1)$

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

27.2 b)

$$\sqrt{2x-1} = 2\sqrt{x} - 1 \quad | ()^2$$

$$2x-1 = (2\sqrt{x}-1)^2$$

$$= 4\cdot x - 2\cdot 2\sqrt{x}\cdot 1 + 1$$

$$2x-1 = 4x - 4\sqrt{x} + 1$$

$$4\sqrt{x} = 2x + 2 \quad | ()^2$$

$$16\cdot x = (2x+2)^2$$

$$16x = 4x^2 + 8x + 4$$

$$0 = 4x^2 - 8x + 4 \quad | :4$$

$$0 = x^2 - 2x + 1$$

$$x_1 = x_2 = 1$$

$$\underline{\underline{x = 1}} \quad \text{Løsn.}$$

Prøve:

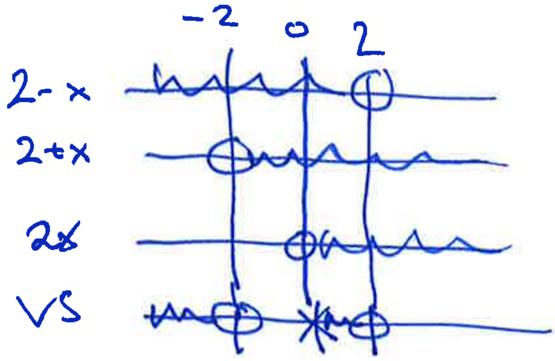
VS: $\sqrt{1} = 1$

HS: $2\cdot 1 - 1 = 1$

ok

BI HANDELSHØYSKOLEN
Nydalsveien 37, 0484 Oslo
Postadresse 0442 Oslo
Telefon 06600
Telefaks 21 04 80 00
Studieinfo. tlf. 810 00 500
www.bi.no
info@bi.no
Org. nr. 971 22 8865

2.8.2 c) $\frac{2}{x} \leq \frac{x}{2}$



$$\frac{2}{x} - \frac{x}{2} \leq 0$$

$$\frac{2\cdot 2}{x\cdot 2} - \frac{x\cdot x}{2\cdot x} \leq 0$$

$$\frac{4-x^2}{2x} \leq 0$$

$$\frac{(2-x)(2+x)}{2x} \leq 0$$

Løsning: $[-2, 0) \cup [2, \rightarrow)$

$-2 \leq x < 0$ eller $x \geq 2$

d) $x(x-4) \geq 3$

$$x^2 - 4x \geq 3$$

$$x^2 - 4x - 3 \geq 0$$

$$(x-x_1)(x-x_2) \geq 0$$

$$x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2}$$

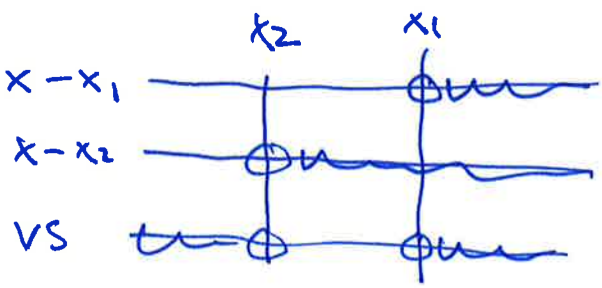
$$= \frac{4}{2} \pm \cancel{\frac{\sqrt{4}\sqrt{7}}{2}} = 2 \pm \sqrt{7}$$

$$x^2 - 4x - 3 = (x - (2+\sqrt{7}))\cdot(x - (2-\sqrt{7}))$$

$$= (x-x_1)(x-x_2)$$

$$x_1 = 2+\sqrt{7} \simeq 4.65$$

$$x_2 = 2-\sqrt{7} \simeq -0.65$$



Løsning: $x \geq x_1$ eller $x \leq x_2$

$x \geq 2+\sqrt{7} \simeq 4.65$ eller $x \leq 2-\sqrt{7} \simeq -0.65$