

FORELESNING 8

EIVIND ERIKSEN

OCT 5, 2017

MET1180

MATEMATIKK

Plan:

- ① Funksjoner og grafer
- ② Lineære funksjoner og rette linjer
- ③ Kvadratiske funksjoner og parabler
- ④ Inntekts- og kostnadsfunksjoner

Pensum:

LE7 3.1-3.9

Minner om:

- * Innlevering I: Frist fredag 11.12.
- * Kontrollprøve: Utlevering mandag.

① Funksjoner og grafer

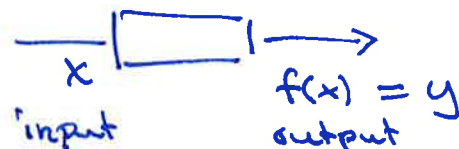
Ekse: $f(x) = x^2 + x - 6$

↑
navnet
på
funksjonen

funksjonsuttrykk

regel som gir en
funksjonsverdi for
hver verdi av x

$$x \mapsto x^2 + x - 6$$



Definisjonsområde:

D_f = De verdier av x som kan settes inn i funksjonen f

Eks: $f(x) = x^2 + x - 6$

$g(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$

$D_f = \text{alle reelle tall} = \mathbb{R}$

$D_g = [0, \rightarrow)$

$= \{x : x \geq 0\}$

alle tall x

slik at $x \geq 0$

$K(x) = 300 + 4x + x^2, x \geq 0$
Kostnadsfunksjon

$D_K = [0, \rightarrow)$

Merk: $f(x) = x^2 + x - 6$

$\leftarrow f(x)$ betyr at vi setter inn
 x i funksjonen f

$x=1 \rightarrow f(1) = 1^2 + 1 - 6$
 $= -4$

Verdimengde: $V_f = \{f(x) : x \in D_f\}$

alle funksjonsverdier

Som er mulige å

oppnå via funksjonen f .

Eks: $f(x) = x^2 + x - 6$

Finne V_f :

$f(x) = x^2 + x - 6 = h$

$x^2 + x - 6 - h = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6-h)}}{2}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{25+4h}}{2}$

Er 1 med i V_g ? Ja.

$f(x) = x^2 + x - 6 = 1$

$x^2 + x - 7 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$

$h : V_f \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = h$ har løsninger

$\Downarrow$

$$25 + 4h \geq 0$$

$$\frac{4h}{4} \geq \frac{-25}{4}$$

$$h \geq -\frac{25}{4}$$

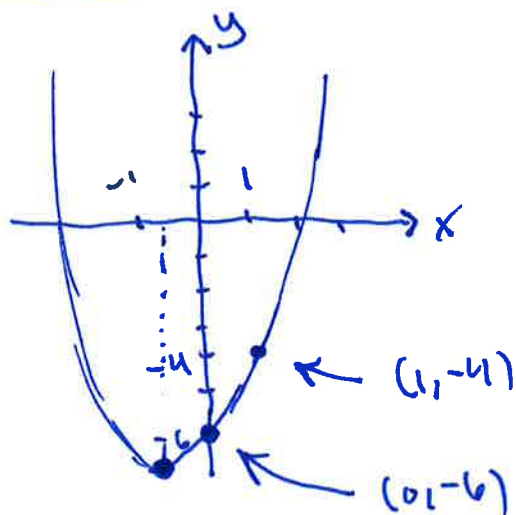
$$V_f = \underline{\underline{\left[-\frac{25}{4}, \rightarrow\right)}}$$

$\Rightarrow$

Grafen til f : Mengden av alle pnt. (x, y)
der x er i D_f og $y = f(x)$
= mengden av alle $(x, f(x))$
med $x \in D_f$.

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

Grafen:



$$\underline{x=1}: f(1) = -4$$

$$\Rightarrow (1, -4)$$

$$\underline{x=0}: f(0) = -6$$

$$V_f = \left[-\frac{25}{4}, \rightarrow\right)$$

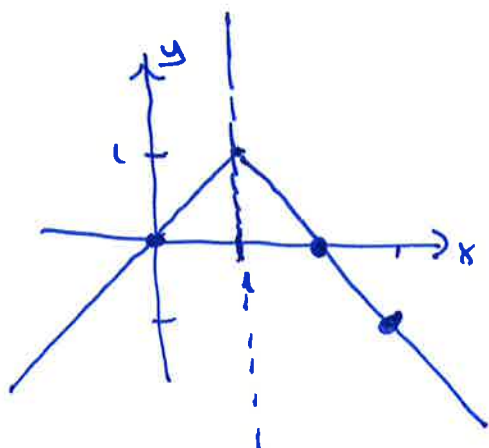
$\uparrow$
-6.25

typisk gnet til en funksjon
i en variabel.

Ek: $f(x) = x^2 + x - 6$

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 2-x, & x > 1 \end{cases}$$

funksjon med
delt forskrift



$$g(1) = 1$$

$$g(0) = 0$$

$$g(2) = 0$$

$$g(3) = -1$$

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ er rasjonelt} \\ 0, & x \text{ er irrasjonelt} \end{cases}$$

② Lineære funksjoner

$$f(x) = \underline{ax + b}$$

lineært uttrykk

Lineær funksjon:

En funksjon der funksjonsuttrykket er et lineært uttrykk

linear

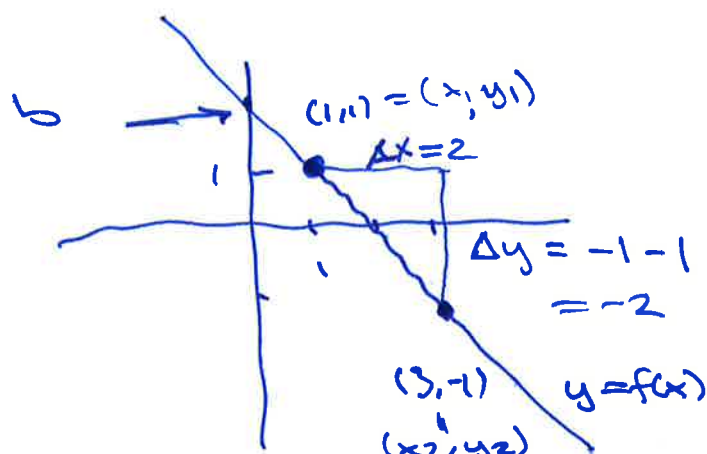
- $a \neq 0$ $f(x) = 2x - 3$
- $a = 0$ $f(x) = 5$

$$f(x) = ax + b$$

der a, b er gitte tall.

grader til f er en $\Leftrightarrow$ f er lineær
rett linje

Ekse: En rett linje går gjennom
(1,1) og (3,-1).



$$f(x) = ax + b$$

Finne a, b:

$$f(0) = a \cdot 0 + b$$

Grøten til $f(x) = ax + b$:

- ① b er skjæringspunktet med y-aksen
- ② a er stigningstallet til linje

⇓

$$f(x) = ax + b = \underline{-1 \cdot x + b}$$

$$\underline{f(1)=1}: \quad \underbrace{-1 \cdot 1 + b}_{f(1)} = 1$$

$$\underline{b=2}$$

⇓

$$\underline{f(x) = -x + 2}$$

↑
 $a = -1$

↑
 $b = 2$

Stigningstall:

En rett linje gjennom
(x_1, y_1) og (x_2, y_2)
med $x_1 \neq x_2$ har
stigningstall:

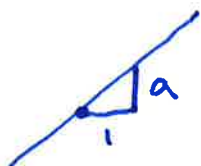
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(Δ = differanse = endring)

I eksempel: $a = \underline{\underline{\frac{-2}{2} = -1}}$

Tolkning av stigningstallet:

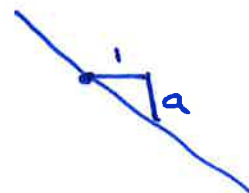
$$a > 0$$



$$a = 0$$



$$a < 0$$



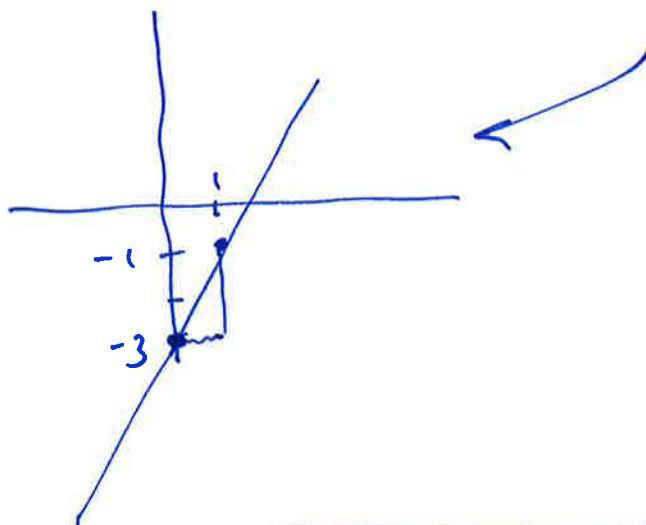
Ekso:

$$f(x) = 2x - 3$$

rett linje

Stign. tall = 2

y-skjæring: -3



Ekso: Linje gjennom (1,1)
med stigningstall -1

↓

$$y - 1 = -1 \cdot (x - 1)$$

$$y = -x + 1 + 1$$

$$= -x + 2$$

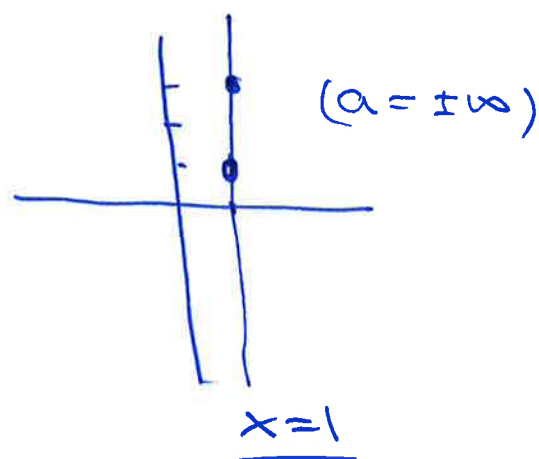
En punktts formelen:

En rett linje gjennom (x_0, y_0) med stigningstall a har ligning

$$y - y_0 = a \cdot (x - x_0)$$

$$(y = a \cdot (x - x_0) + y_0)$$

Eks: Linjen gjennom
(1,1) og (1,3)
= vertikal linje
siden $x_1 = x_2$



(ikke grafen til
en funksjon)

Rette linjer:

$y = ax + b$: skrå eller horisontal linje
($a \neq 0$) ($a = 0$)

$x = c$: vertikal linje

② Kvadratiske funksjoner = andregrads funksjoner

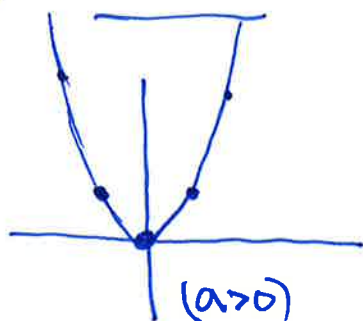
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Grafen kalles parabel

a, b, c gitte tall

($a \neq 0$)

Eks: $f(x) = x^2$:



x	0	1	2	3	-1	-2	-3
f(x)	0	1	4	9	1	4	9

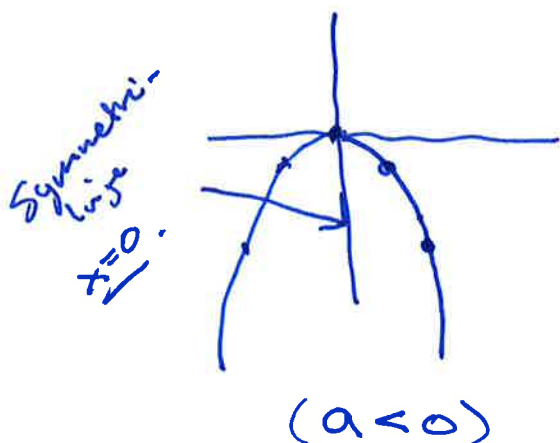
Symmetrisk

$V_f = [0, \infty)$

Minimum: $x=0$

Ekse: $f(x) = -x^2$

x	0	1	2
$f(x)$	0	-1	-4



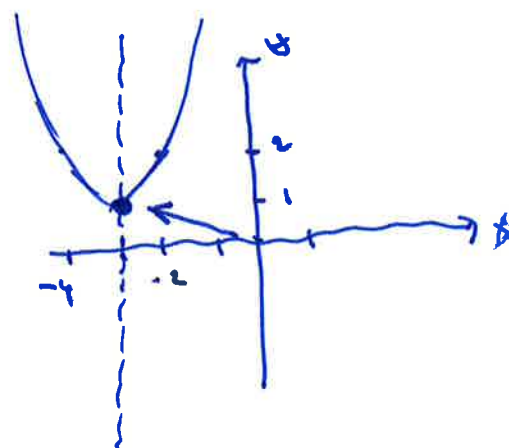
Symmetrisk
 $V_f = (0, 0]$
aks: $x=0$

Analyse av $f(x) = ax^2 + bx + c$

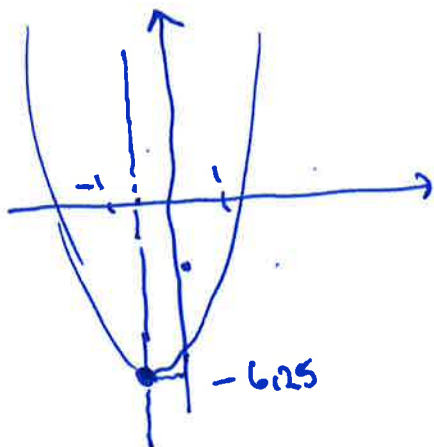
Ekse: $f(x) = x^2 + 6x + 10$
 $= \underbrace{x^2 + 6x + 9}_{(x+3)^2} + 10 - 9$
 $= \underline{\underline{(x+3)^2 + 1}}$

symmetriakse:

$x = -3$



Ekse: $f(x) = x^2 + x - 6$
 $= \underbrace{x^2 + x + \frac{1}{4}}_{(x+\frac{1}{2})^2} - 6 - \frac{1}{4}$
 $= \underline{\underline{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}}}$
 $\uparrow$
 -6.25



Minimum:
 $x = -0.5$
 $y = -6.25$

$f(-3) = 1$

Minimum: $x = -3$
 $(-3, 1)$

Oppsummering: $f(x) = ax^2 + bx + c$

* Symmetro-akse: $x = -\frac{b}{2a}$

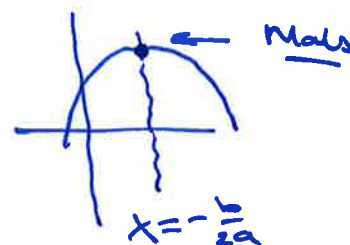
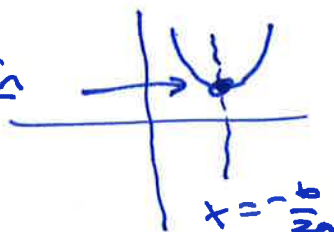
* Krumning:

$a > 0$

$a < 0$

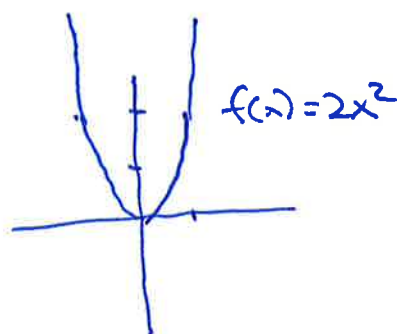
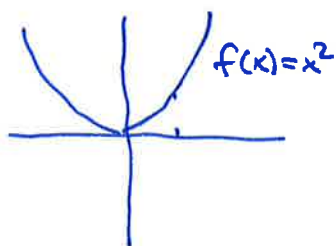
Parabler:

Min



$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) \\ &= a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$|a|$: hvor bratt furløper stiger / sletter:



4) Kostnads- og inntektsfunksjoner

Ekso:

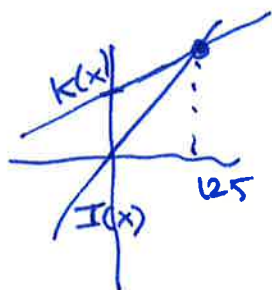
$$I(x) = 250x, \quad x \geq 0$$

$$K(x) = 5000 + 210x, \quad x \geq 0$$

$$\pi(x) = I(x) - K(x)$$

$$= 250x - (5000 + 210x)$$

$$= 40x - 5000$$



$$\pi(x) = 0: \quad \pi(x) = 40x - 5000 = 0$$

$$\frac{40x}{40} = \frac{5000}{40}$$

$$x = \underline{\underline{125}}$$

Ekso:

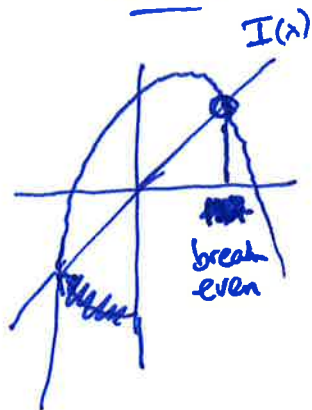
$$I(x) = 20x$$

$$K(x) = 1500 + 12x - 0,03x^2$$

$$= 1500 + (12 - 0,03x) \cdot x$$

faste

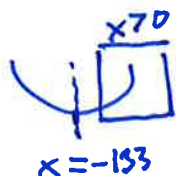
variable
kostn.
per enhet.



$$\pi(x) = 20x - (1500 + 12x - 0,03x^2)$$

$$= \underline{0,03x^2} + 8x - 1500$$

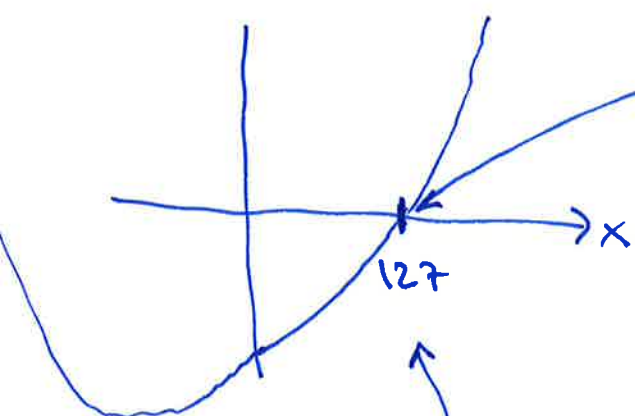
$$a = 0,03 > 0$$



Symmetri-akse:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{0,06} = -133$$

$x \geq 0$ betyr at $\pi(x)$ er voksende funksjon.



$$\pi(x) = 0 :$$

$$0,03x^2 + 8x - 1500 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 1500 \cdot 0,03}}{2 \cdot 0,03}$$

$$= \frac{-8 + \sqrt{64 + 180}}{0,06}$$

$$= \frac{\sqrt{244} - 8}{0,06} \approx \underline{\underline{127}}$$

break-even

underskudd

$$0 \leq x < 127 : \pi(x) < 0$$

$$x > 127 : \pi(x) > 0$$

overskudd