MET 1180, forelesning 9, 12. okt. 2017, Runar Ile

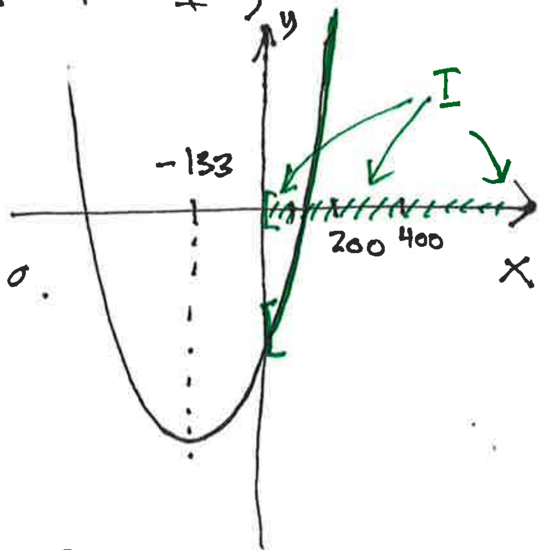
1. Voksende og avtagende funksjoner
2. Sirkler og ellipser
3. Polynomfunksjoner
4. Rasjonale funksjoner og asymptoter

1. Voksende og avtagende funksjoner

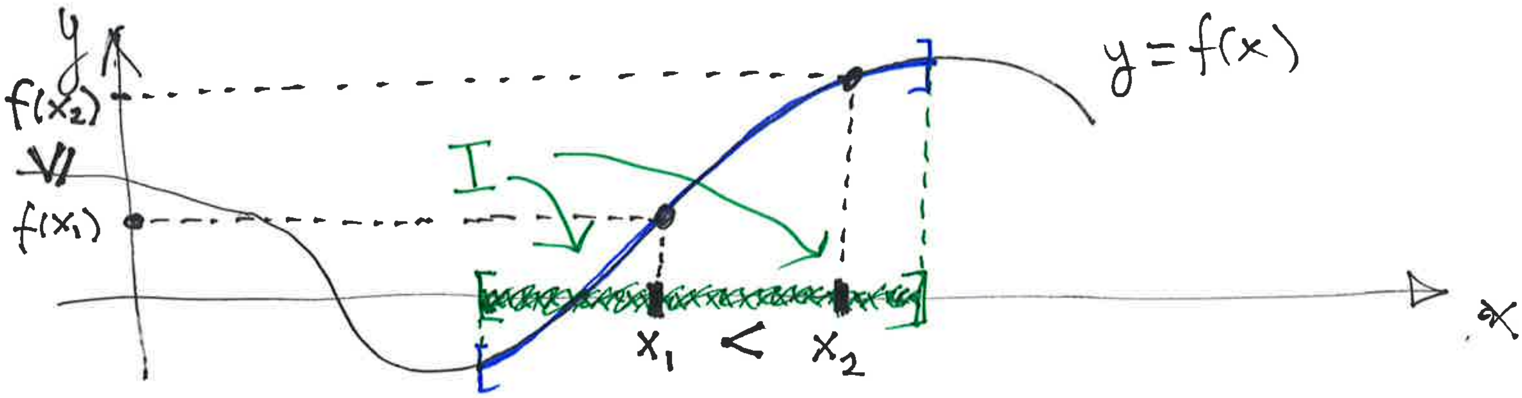
Eks: $f(x) = 0{,}03x^2 + 8x - 1500$, $I = [0, \rightarrow\rangle$

- vokser $f(x)$ i hele I? (dvs $0 \leq x$)
- avtar $f(x)$ i hele I?
- ingen av delene? (dvs $f(x)$ vokser og avtar i I)

Jeg ser på grafen
(GeoGebra eller regne verdier)
- ser at $f(x)$ vokser for $x \geq 0$.



Definisjon: En funksjon $f(x)$ er voksende på intervallet I hvis for alle $x_1 < x_2$ i I så er $f(x_1) \leq f(x_2)$



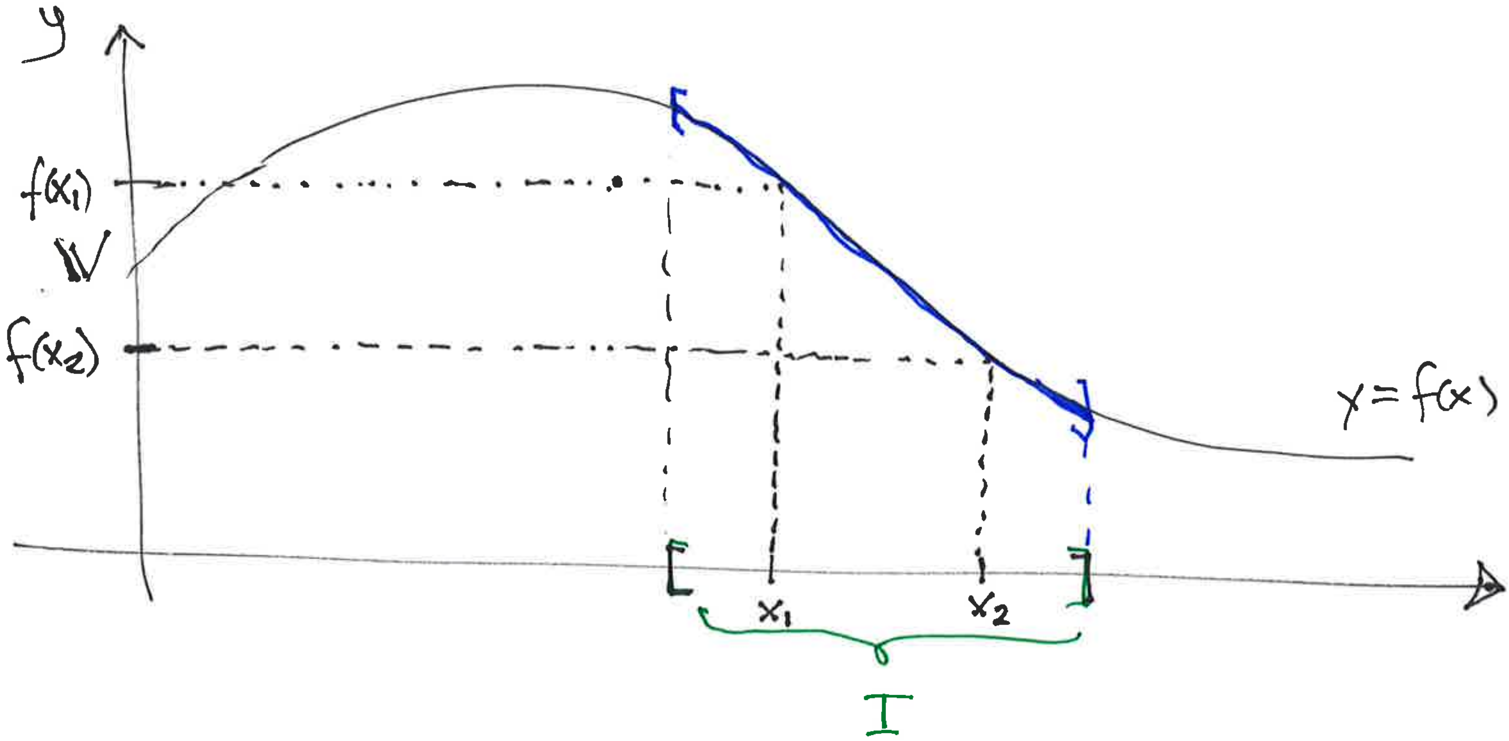
Eks: $f(x) = 2x + 5$ er voksende i alle intervaller.

Begrunnelse: Hvis $x_1 < x_2$ så er

$$2x_1 < 2x_2 \quad \text{og}$$

$$f(x_1) = 2x_1 + 5 < 2x_2 + 5 = f(x_2)$$

Definisjon: En funksjon $f(x)$ er avtagende på et intervall I hvis for alle $x_1 < x_2$ i I så er $f(x_1) \geq f(x_2)$.

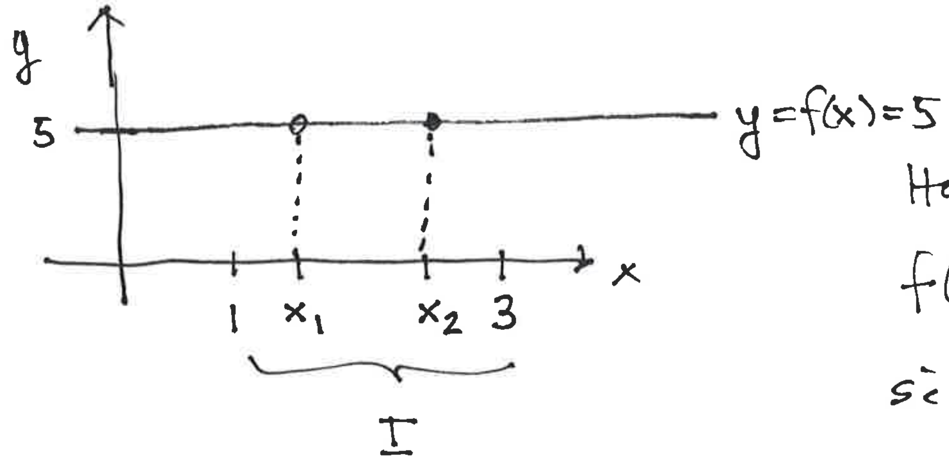


Eks: $f(x) = -2x + 5$ er avtagende på alle intervaller fordi hvis $x_1 < x_2$

så er $-2x_1 > -2x_2$

og $\underbrace{-2x_1 + 5}_{f(x_1)} > \underbrace{-2x_2 + 5}_{f(x_2)}$

Oppg: $f(x) = 5$
Avgjør om $f(x)$ er voksende eller avtagende på $[1, 3]$.



Hvis $x_1 < x_2$ så er

$f(x_1) = 5 \leq 5 = f(x_2)$

så $f(x)$ er voksende i $[1,3]$

Hvis $x_1 < x_2$ så er

$f(x_1) = 5 \geq 5 = f(x_2)$

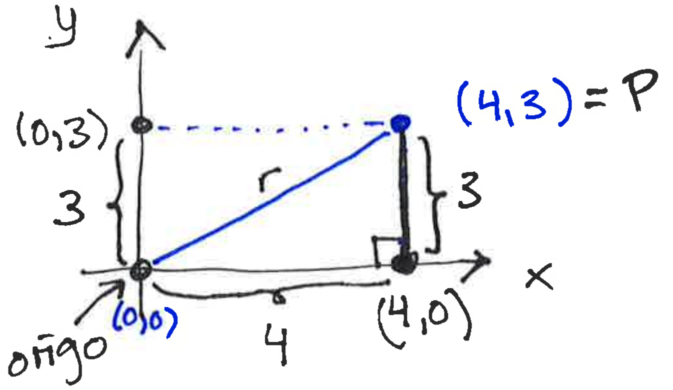
så $f(x)$ er avtagende i $[1,3]$.

Hvis $f(x_1) < f(x_2)$ for alle $x_1 < x_2$ i I er $f(x)$ <u>strengt</u> voksende i intervallet I

(og $f(x)$ strengt avtagende i I hvis $f(x_1) > f(x_2)$ for alle $x_1 < x_2$ i I)

---

2. Sirkler og ellipser



Hva er avstanden mellom (4,3) og origo?

Pytagoras gir svaret:

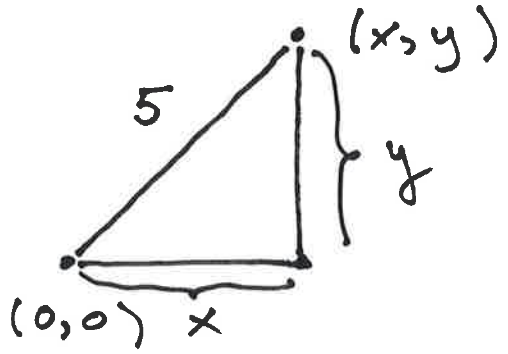
$r^2 = 4^2 + 3^2 \qquad (r \geq 0)$

$r^2 = 16 + 9$

$r^2 = 25$

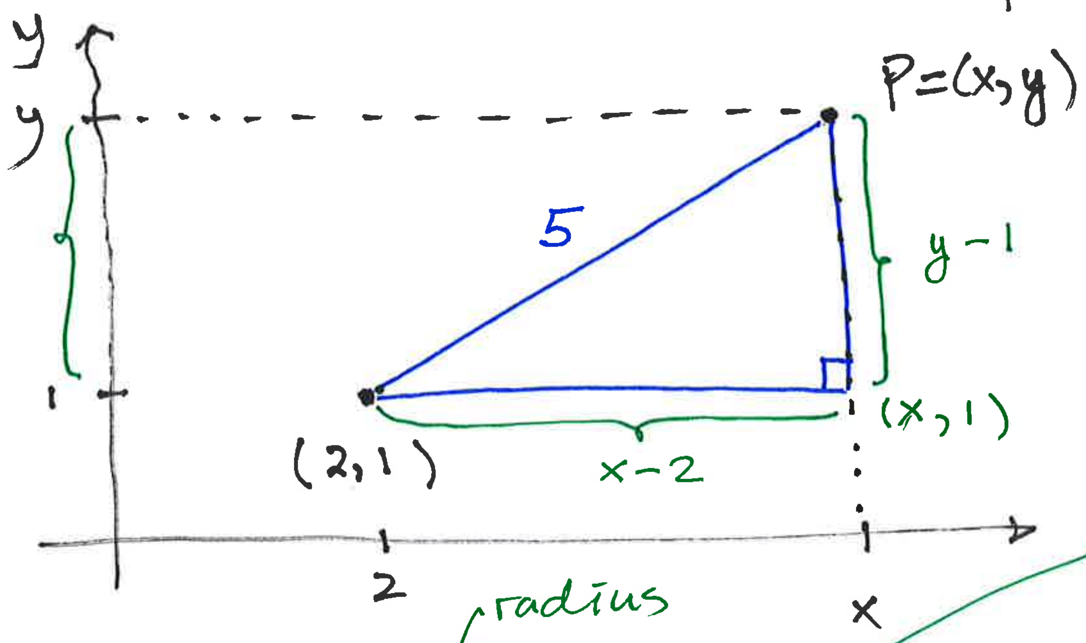
$r = \sqrt{25} = 5$

Hvilke andre punkter ligger i avstand 5 fra origo? Et slikt punkt kan skrives som (x, y) (for P var $x=4$, $y=3$) vil tilfredsstille $5^2 = x^2 + y^2$



– dette er en likning med to ukjente
– har uendelig mange løsninger, nemlig alle punktene på sirkelen med sentrum i (0,0) og radius 5.

Hvis sentrum i sirkelen er punktet (2,1):



sentrum

radius

Pytagoras: $5^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$

$$25 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

$$25 = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$$

Oppg Finn radius og sentrum i disse sirklene:

a) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$

b) $x^2 + (y-5)^2 = 10$

c) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 1$

Svar (a): sentrum er $(3,2)$
radius er $\sqrt{16} = 4$

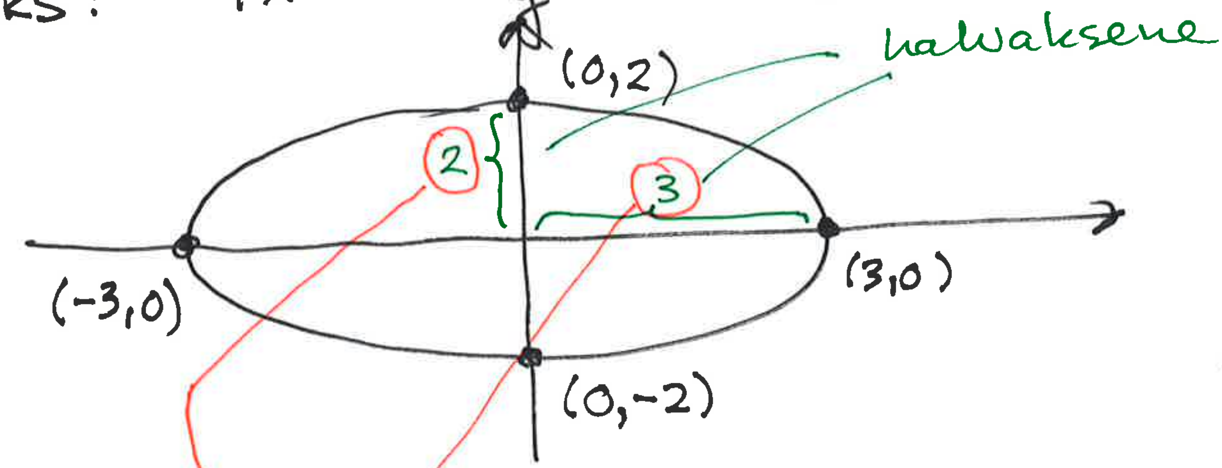
(b): sentrum er $(0,5)$
radius er $\sqrt{10}$

(c): sentrum er $(-1,-2)$
radius er $\sqrt{1} = 1$

sentrum:
$\begin{cases} x+1=0 \\ y+2=0 \end{cases}$
så $\begin{cases} x=-1 \\ \text{og } y=-2 \end{cases}$

Ellipser

EKS: $4x^2 + 9y^2 = 36$



$$\frac{4}{36}x^2 + \frac{9}{36}y^2 = 1$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

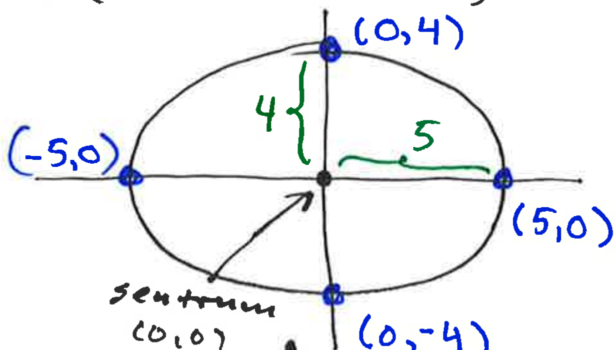
minner om sirkellikningen men x-en strekkes med faktor 3 og y-en m. faktor 2

Generelt kan vi skrive likningen for en ellipse med sentrum i (x_0, y_0) og halvakser a og b som

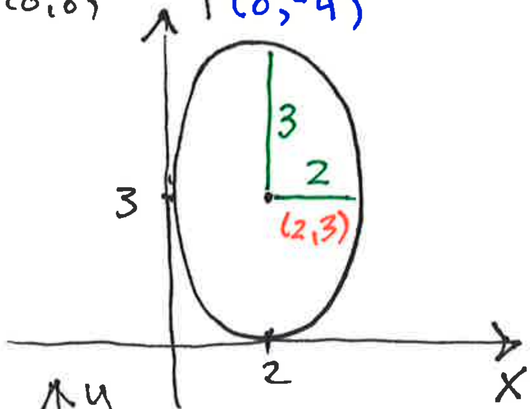
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Oppg Finn sentrum og halvakser til disse ellipsene og lag en skisse av grafen.

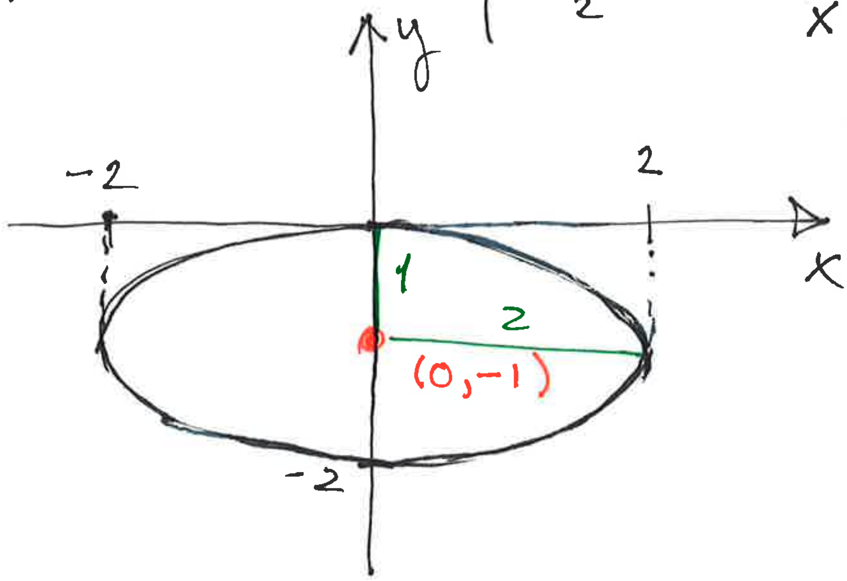
a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$



b) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$



c) $\frac{x^2}{4} + (y+1)^2 = 1$



3. Polynomfunksjoner

Polynomer: $f(x) = 2x - 5$ grad 1

$f(x) = 3x^{2} - 2x + 10$ grad 2

$f(x) = x^{3} + 27$ grad 3

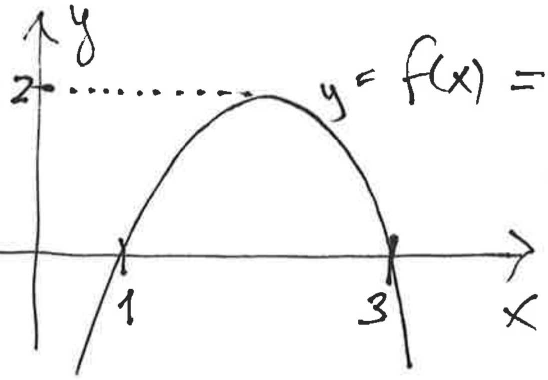
Ikke polynom: $2x^2 - \frac{1}{x}$

Nullpunkter: x-verdier slik at $f = 0$

Eks: $f(x) = 2x - 5$ har nullpunkt $x = 2{,}5$

Hvis $f(x)$ har grad 2 er enten 2, 1, eller ingen nullpunkter.

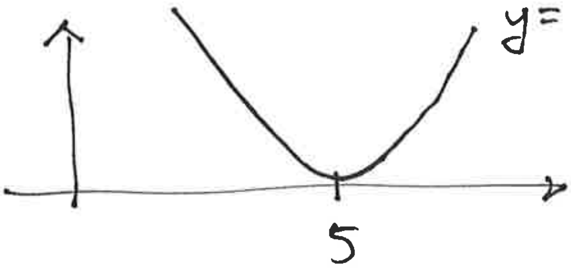
Eks:



$$y = f(x) = -2(x-1)(x-3) = -2x^2 + 8x - 6$$

$$f(2) = (-2)\cdot(2-1)\cdot(2-3)$$
$$= -2 \cdot 1 \cdot -1 = 2$$

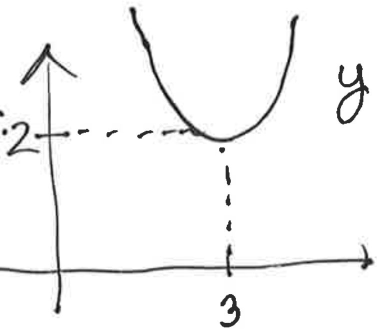
Eks:



$$y = f(x) = \frac{1}{2}(x-5)^2$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 - 10x + 25)$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{25}{2}$$

$x = 5$ er et dobbelt nullpunkt!

Eks:



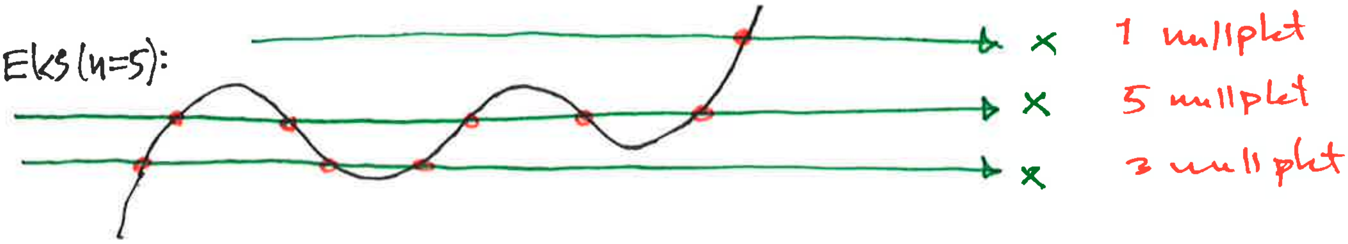
$$y = f(x) = (x-3)^2 + 2$$
$$= x^2 - 6x + 11$$

abc: $\dfrac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 11}}{2\cdot 1}$

Fakta:

- Polynomfunksjoner av grad n har maksimalt n nullpunkter

Eks ($n=5$):



- Hvis n er et oddetall er det alltid minst et nullpunkt.

Eks: $f(x) = x^3 + 27$ har nullpkt: $x^3 = -27$

dvs $x = \sqrt[3]{-27}$

$\underline{x = -3}$.

Har $f(x)$ flere nullpkt?

$$\boxed{\text{Når vi har et nullpkt får vi en lineær faktor.}}$$

I dette eks:

$$x^3 + 27 : (x+3) = x^2 - 3x + 9$$
$$\frac{-(x^3+3x^2)}{-3x^2+27}$$
$$\frac{-(-3x^2-9x)}{9x+27}$$
$$\frac{9x+27}{0}$$

Altså: $x^3 + 27 = (x+3)(x^2-3x+9)$

Har $x^2 - 3x + 9$ nullpkt?

Det er i så fall

$$\frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$

neg.

– ingen løsn.

4. Rasjonale funksjoner og asymptoter

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$ – en rasjonal funksjon

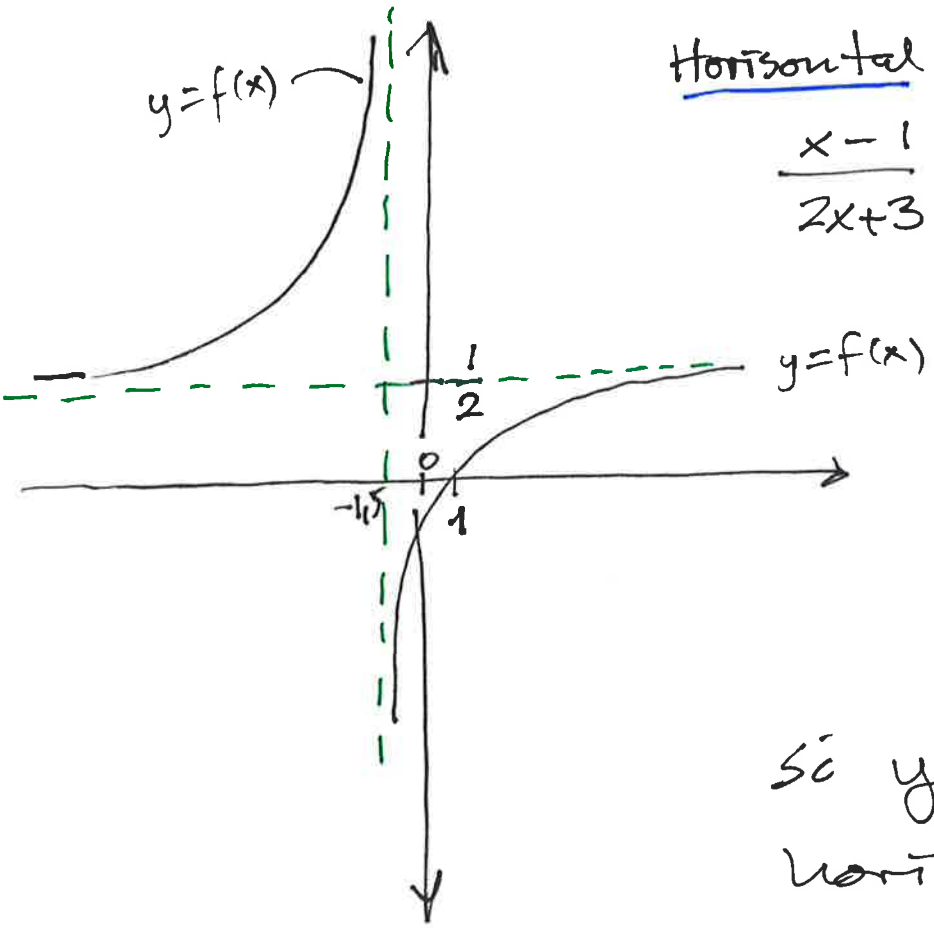
polynomfunksjoner

Eks: $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$

Nullpkt: $f(x) = 0$
dvs $x - 1 = 0$
dvs $\underline{x = 1}$.

– ikke definert der nevner er lik 0, dvs $x = -\frac{3}{2} = \underline{-1{,}5}$

$f(x)$ har en vertikal asymptote for $x = -\frac{3}{2}$



Horisontal asymptote:

$$\frac{x-1}{2x+3} = \frac{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{3}{x}} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}} \xrightarrow[\text{el } x \to -\infty]{x \to \infty} \frac{1}{2}$$

Så $y = \frac{1}{2}$ er den horisontale asympt.