MET 1180, 1. forelesning, 23. aug. 2018, Runar Ile

Plan:
1. Intro. til kurset
2. Algebraiske uttrykk
3. Regneløver
4. Røtter
5. Potenser
6. Prioriteringsregler
7. Likninger

1. Intro. til kurset

Høst

- Finansmatematikk
- Funksjoner og grafer
- Derivasjon og funksjons-drøfting

$\underbrace{}$

Mer enn våren, mye rep.

Vår

- Integrasjon
- Lineære likningssystemer
- Funksjoner i to variabler $z = f(x, y)$.

- semesterplan !
- Veiledningtilbud (tors 14-16, D1-80)
- kontrollregning & midtveiseksamen !
- 2 (frivillige) innleveringer

2. Algebraiske uttrykk

Variabler: $x, \quad y, \quad z, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots$

$a, \quad b, \quad c, \ldots, m, n, \ldots$

Multiplisere med tall: $3 \cdot x \overset{\text{skrivemåte}}{=} 3x = x + x + x$

$$3 \cdot 2 \neq 32$$

$$\sqrt{3} \cdot x = \sqrt{3}\, x$$

$$(-1) \cdot x = -x$$

$$1 \cdot x = x$$

Addere : $x + x = 2x$

$x + y$ kan ikke gjøres enklere

$x + y + x = 2x + y$

Multiplisere variabler

$$x \cdot y \overset{\text{skrivemåte}}{=} xy$$

$$x \cdot x = x^2$$

$$xy \cdot x^2 = x^3 y = x \cdot x \cdot x \cdot y$$

Dividere uttrykk : $\frac{x+y}{z}$, $\frac{x-y}{x+y}$, osv.

Ved disse elementære regneoperasjonene får vi rasjonale algebraiske uttrykk

$$x^2 - 6x + 5 \; , \; \frac{y}{x^2+1} \; , \; \frac{x+1}{y} - \sqrt{3}\,x + x^3 y$$

også $\sqrt{x^2+1}$, $\frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, ...

er algebraiske uttrykk. (alt med variabler)

Vi kan spesifisere tall for variablene.

Eks: I uttrykket $\frac{2y}{x^2+1}$ kan vi sette $x=3$, $y=-1$.

Da får vi et tall:

$$\frac{2\cdot(-1)}{3^2+1} = \frac{-2}{10} = -\frac{2\cdot 1}{2\cdot 5} = -\frac{1}{5}$$

$$= -0{,}20$$

Hvis $x=-1$, $y=3$, får vi

$$\frac{2\cdot 3}{(-1)^2+1} = \frac{2\cdot 3}{1+1} = \frac{2\cdot 3}{2\cdot 1} = \frac{3}{1} = 3$$

Uttrykket $\frac{2y}{x^2+1}$ kan ikke gjøres enklere.

<u>Oppg</u> Vi har uttrykket $\frac{x^2-x-6}{x-3}$.

a) Sett inn $x=1$ i uttrykket og forenkl brøken mest mulig

b) —"— $x=5$ ——— " ———

c) —"— $x=-2$ ——— " ———

d) Test flere verdier. Lag en tabell

x	1	5	-2	2	8	3
$\frac{x^2-x-6}{x-3}$	3	7	0	4	10	$\frac{0}{0}$ ikke et tall!

Finn mønsteret. Svar: $x+2$ (for $x \neq 3$).

$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$ så

$$\frac{x^2-x-6}{x-3} = \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} \overset{x-3\neq 0}{=} \frac{(x+2)}{1}$$

$$= x+2 \quad (\text{for } x \neq 3).$$

3. Regnelover Anta a, b, c er uttrykk (eller tall)

Da har vi:

(1) $a + b = b + a$ (addisjon er kommutativt)

to forskjellige uttrykk („regnestykker') som gir samme „svar'.

Eks: $a = 2x+1$, $y = x - y$

Da er $(2x+1) + (x-y) = (x-y) + (2x+1)$

---

(2) $a \cdot b = b \cdot a$ (multiplikasjon er kommutativt)

Eks: $(2x+1)(x-y) = (x-y)(2x+1)$.

---

(3) $(a+b) + c = a + (b+c)$ assosiativitet av addisjon

Eks: $(2x+3) + y = 2x + (3+y)$

---

(4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ assosiativitet av mult.

Eks $(3 \cdot x) \cdot y = 3 \cdot (x \cdot y)$

Assosiativitet betyr at vi ikke trenger paranteser hvis det bare er + eller bare $\cdot$

Eks: $3+(4+5) = (3+4)+5$

$= 3+9 \qquad = 7+5$

$= 12 \qquad = 12$

Vi skriver bare $3+4+5$.

(5) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

den distributive loven

Eks: $2\cdot(3+4) \qquad 2\cdot 3 + 2\cdot 4$

$= 2\cdot 7 \qquad = 6+8$

$= 14 \qquad = 14$

Eks: $x(x+3) = x\cdot x + x\cdot 3 = x^2+3x$

Kvadratsetningen

to uttrykk som gir samme svar for alle innsatte tall

$$\boxed{(x+r)^2} = \underbrace{(x+r)}_{a}\cdot(\overset{b}{x}+\overset{c}{r}) \overset{\text{distr.}}{=} (x+r)\cdot x + (x+r)\cdot r$$

$$\overset{\text{komm.}}{=} x\cdot(x+r) + r\cdot(x+r) \overset{\text{distr.}}{=} x\cdot x + x\cdot r + r\cdot x + r\cdot r$$

$$\overset{\text{komm.}}{=} x^2 + r\cdot x + r\cdot x + r^2 = \boxed{x^2+2rx+r^2}$$

Eks: $(x+1)^2 \overset{r=1}{=} x^2+2\cdot 1\cdot x + 1^2 = x^2+2x+1$

Oppg: Bruk kvadratsetningen til å skrive $x^2 + 6x + 9$ som et kvadrat.

Løsning: Vi må finne r slik at $2r = 6$ og $r^2 = 9$. Fra $2r = 6$ får vi $r = \frac{6}{2} = 3$ og innsatt i $r^2 = 9$ får vi

vs: $3^2 = 9$, hs: 9 – så ok.

Kvadratsetningen gir da at $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$.

Alternativ: $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = (x+3)^2$

Konjungatsetningen

$$\underbrace{(x-r)}_{a}\underbrace{(x}_{b}+\underbrace{r}_{c}) \overset{\text{distr}}{=} (x-r)\cdot x + (x-r)\cdot r$$

$$\overset{\text{distr.}}{=} x \cdot x - r \cdot x + x \cdot r - r \cdot r$$

$$= x^2 - r^2$$

Eks: $99 = 100 - 1 = (10-1)\cdot(10+1)$

$$= 9 \cdot 11$$

Oppg Bruk konjungatsetningen til å faktorisere $x^2 - 25$ som et produkt av uttrykk av grad 1.

Løsning: $r^2 = 25$ så $r = 5$ eller $r = -5$

$r = 5$: $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$

$r = -5$: $x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$

Oppg Bruk kvadratsetn. og konjungatsetn. til å faktorisere uttrykkene.

Løsn:

a) $x^2 - 16$ $(x-4)(x+4)$ $(r=4)$

b) $x^2 - 2x + 1$ $(x-1)^2$ $(r=-1)$

c) $x^2 + 10x + 25$ $(x+5)^2$ $(r=5)$

d) $9x^2 - 4y^2$ $(3x-2y)(3x+2y)$ $(r=2y)$

e) $x^2 + 6xy + 9y^2$ $(x+3y)^2$ $(r=3y)$

---

4. Røtter

Kvadratroten til 5 er det positive tallet a slik $a \cdot a = 5$. Det finnes i kalkulatoren:

$a = 2{,}2361\ldots$ Vi skriver $a = \sqrt{5}$

Det finnes ikke kvadratrøtter til negative tall!

$\sqrt{0} = 0$.

Kan lage uttrykk:

Eks: $\sqrt{x^2 + 16}$. Vi kan sette inn $x = 3$

og få $\sqrt{3^2 + 16} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Oppg Beregn (uten kalk.)

Løsn:

a) $(\sqrt{2} + 3)^2$

Bruker kvadratsetn: $\sqrt{2}^2 + 2 \cdot 3\sqrt{2} + 3^2$

$= 2 + 6\sqrt{2} + 9 = \underline{\underline{11 + 6\sqrt{2}}}$

b) $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$

Bruker konjungatsetn:

$\sqrt{5}^2 - 1^2 = 5 - 1 = \underline{\underline{4}}$

Det finnes andre typer røtter:

$\sqrt[3]{5}$ er tallet a slik at $a \cdot a \cdot a = 5$

(faktisk $a = 1{,}7100\ldots$)

$\sqrt[5]{32} = 2$

---

5. Potenser

– gjentatt multiplikasjon

Eks: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \overset{\text{skrivemåte}}{=} 3^4$ („tre i fjerde")

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ („fire i tredje")

grunntallet, eksponenten

$$4^3 \neq 4 \cdot 3 \quad \text{(vanlig feil!)}$$

$$\begin{array}{ccc} 4^3 & & 4 \cdot 3 \\ \| & & \| \\ 64 & & 12 \end{array}$$

$$10^2 \cdot 10^3 = (10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10)$$
$$= 10^5$$
$$= 10^{2+3}$$

– vi legger sammen eksponentene når vi multipliserer potenser <u>med</u> <u>samme</u> <u>grunntall</u>.

$$\frac{3^6}{3^4} = \frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} = \frac{3\cdot 3}{1} = 3^2$$

$$= 3^{6-4}$$

$$\frac{5^3}{5^3} = 1 = 5^{3-3} = 5^0$$

Generelt: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$$

Eks $(3^2)^4 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2$

$$= 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^8$$

$$= 3^{2\cdot 4}$$

---

6. Prioriteringsregler.

Oppg Beregn $2+3\cdot 4 = 2+12 = 14$

$(2+3)\cdot 4 = 5\cdot 4 = 20$

Hjemmeoppg: Tast $2+3\cdot 4$ på kalk.
Ser hva du får.

7. Likninger

- en påstand om at to algebraiske uttrykk gir samme svar.
- men vil typisk bare være sant for noen verdier av variablene. Disse verdiene kalles for løsningene til likningen.