MET 1180, 10. forelesning, 18. okt. 2018, Runar Ile

1. Noen veiledningsoppgaver
2. Mer om omvendte funksjoner — kap. 3.11
3. Eksponentialfunksjoner — kap. 3.12
4. Logaritmer — kap. 3.13

1. Noen veiledningsoppg. (fra 4. okt.)

Oppg 2c   Finn sentrum og radius til sirkelen

$$(3x-2)^2 + (3y-4)^2 = 9$$

Finner sentrum ved å løse likningene

$3x-2=0$ og $3y-4=0$

dvs $x = \frac{2}{3}$ dvs $y = \frac{4}{3}$

så $S = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Radius - løsn 1: Vi setter $u = 3x$ og $v = 3y$

Da er likn.: $(u-2)^2 + (v-4)^2 = 9$

som har radius i uv-koordinater lik $\sqrt{9} = 3$

som tilsvarer 3 enheter på u-aksen

som tilsvarer 1 enhet på x-aksen

fordi $3 = u = 3x$

så radius i xy-koordinater er $\underline{\underline{1}}$

Løsn 2: Vi har $3x-2 = 3(x-\frac{2}{3})$

så $(3x-2)^2 = [3(x-\frac{2}{3})]^2 = 3^2 \cdot (x-\frac{2}{3})^2$

1 tilsvarende $(3y-4)^2 = 3^2 \cdot (y-\frac{4}{3})^2$

så likningen blir

$$9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+9\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=9$$

deler på 9 på bs:

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=1$$

som er på standardform for sirkler

så $\underline{\underline{S=\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)}}$ og radius $r=\sqrt{1}=\underline{\underline{1}}$

<u>Oppg 3d</u> Leser $S=(0,5)$, halvakser $a=13$, $b=5$

så $$\underline{\underline{\frac{x^2}{13^2}+\frac{(y-5)^2}{5^2}=1}}$$

<u>Oppg 4-5 c</u> Skal finne $f(x)=c+\frac{a}{x-b}$

standardform for hyperbler.

Vertikal asymptote: linjen $x=b$ (y fri)

Horisontal —"— : linjen $y=c$ (x fri)

a må vi bestemme ved å velge et punkt på grafen, sette inn, og løse likningen.

Grafen ligger symmetrisk om skjæringspunktet mellom asymptotene. Vi ser at det er $(8, 110)$ så

vertikal asymptote: $x=8=b$

hor. asymp. : $y=110=c$

så $f(x)=110+\frac{a}{x-8}$

$P = (14, 111)$ ligger på grafen til $f(x)$

dvs $f(14) = 111$

dvs $110 + \frac{a}{14-8} = 111$ dvs $\frac{a}{6} = 1$

dvs $a = \underline{6}$

så $f(x) = 110 + \frac{6}{x-8}$

Oppg 6 f $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 10x + 16} \overset{\text{poly. div}}{=} x + 10 + \frac{84(x-2)}{x^2 - 10x + 16}$

faktoriserer nevneren: $x^2 - 10x + 16 = (x-2)(x-8)$
og forkorter $(x-2)$ i $f(x)$.

Får $f(x) = x + 10 + \frac{84}{x-8}$

Da er linjen $x = 8$ (y fri) vertikal asymptote for $f(x)$.
og linjen $y = x + 10$ er en skrå asymptote for $f(x)$

Oppg 7b $f(x) = (x-5)\sqrt{0{,}2x+5} - 0{,}2(x-3)^2$
og $I = [5, 15]$

Har at $f(x)$ er kontinuerlige i hele intervallet.
Regner (kalk):
$f(5) = -0{,}80 < 0$ og $f(15) = -0{,}52 < 0$ hmm...
Prøver $f(6) = 0{,}69 > 0$ så, ved skjæringssetningen
har $f(x)$ et nullpunkt mellom 5 og 6 og
et nullpunkt mellom 6 og 15.

Oppg 3a (fra kontrollprøven) Skal finne alle polynomer på formen $f(x) = 2x^2 + bx + c$ som har to røtter (nullpunkter) med avstand 3.

Mange løsninger!

A) Hvis k er den minste roten, er den største $k+3$. Altså er

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

$$= 2(x-k)(x-(k+3))$$

$$\overset{\text{regner og trekker sammen}}{=} 2x^2 \underbrace{- 2(2k+3)}_{b}x + \underbrace{2k(k+3)}_{c}$$

B) Hvis s er midtpunktet mellom røttene, er den minste roten $s - \frac{3}{2}$ og den største $s + \frac{3}{2}$. Altså er

$$f(x) = 2\left(x - \left(s - \tfrac{3}{2}\right)\right)\left(x - \left(s + \tfrac{3}{2}\right)\right)$$

$$\overset{\text{regner trekker sammen}}{=} 2x^2 \underbrace{- 4s}_{b}x + \underbrace{2s^2 - \tfrac{9}{2}}_{c}$$

– ser helt forskjellig ut fra A!

Eks Anta røttene er 2 og 5

I A er $k = 2$ så $f(x) = 2x^2 - 2\underbrace{(2\cdot 2+3)}_{7}x + 2\cdot\underbrace{2}_{4}\cdot\underbrace{(2+3)}_{5}$

$$= 2x^2 - 14x + 20$$

I B er $s = 3{,}5$ så $f(x) = 2x^2 - 4\cdot 3{,}5\cdot x + 2\cdot \underbrace{3{,}5^2}_{12{,}25} - 4{,}5$

$$= 2x^2 - 14x + 20$$

2. Mer om omvendte funksjoner

Eks: $f(x) = (x-3)^2$, $D_f = [3, \infty\rangle$ (dvs $x \geq 3$)

x	3	4	5	6	7	$g(x)$
$f(x)$	0	1	4	9	16	x

← den omvendte funksjonen til $f(x)$.

så $g(0) = 3$, $g(1) = 4$, $g(4) = 5$ osv.

Dermed er

$f(g(0)) = f(3) = 0$ og $g(f(3)) = g(0) = 3$

$f(g(1)) = f(4) = 1$ $\quad$ $g(f(4)) = g(1) = 4$

$f(g(4)) = f(5) = 4$ $\quad$ $g(f(7)) = g(16) = 7$

Mønster: $f(g(x)) = x$ for alle x i D_g og $g(f(x)) = x$ for alle x i D_f

Vi kan finne et uttrykk for $g(x)$ ved å løse likningen $y = f(x) = (x-3)^2$ for x og skifter variabel fra y til x

får $\sqrt{y} = \pm(x-3)$, dvs enten (+): $x = 3 + \sqrt{y}$

eller (−): $x = 3 - \sqrt{y}$

Finner riktig kandidat ved å sette inn et punkt på grafen til $f(x)$.

$(4,1)$ gir hs: $3 \pm \sqrt{1} = 3 \pm 1$

vs: 4

skifter variabel fra y til x

så $g(x) = 3 + \sqrt{x}$ med $D_g \overset{\text{alltid}}{=} V_f = [0, \infty\rangle$

Eks: $f(x) = (x-3)^2$, $D_f = \langle -\infty, 3]$ (dvs $x \leq 3$)

$x = 2$ gir $f(2) = (2-3)^2 = 1$ så $(2,1)$ ligger på grafen til $f(x)$.

$(2,1)$ gir hs: $3 \pm \sqrt{1} = 3 \pm 1$

vs: 2

så denne gangen får vi $g(x) = 3 - \sqrt{x}$
med $D_g = V_f = [0, \infty\rangle$

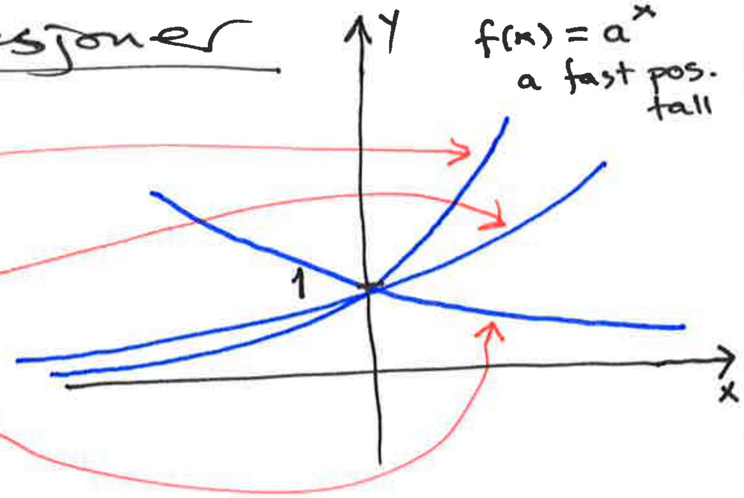
- Definisjonsmengden er en (viktig!) del av funksjonen!
- Grafen til $f(x)$ og dens inverse $f^{-1}(x)$ er symmetriske om linjen $y = x$
- For at en funksjon $f(x)$ skal ha en invers funksjon, må $f(x)$ være strengt voksende (det første eks.) eller strengt avtagende (det andre eks.) i hele sitt definisjonsområde.
- $D_{f^{-1}} = V_f$ og $V_{f^{-1}} = D_f$

3. Eksponentialfunksjoner

Eks: $f(x) = e^x$

$f(x) = 1{,}021^x$

$f(x) = 0{,}98^x$



$a > 1$: $f(x) = a^x$ strengt voksende

og $a^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0^+$

$0 < a < 1$: $f(x) = a^x$ strengt avtagende

og $a^x \xrightarrow[x \to \infty]{} 0^+$

Oppg Kåre setter inn 4000 på konto med 1,2 % rente. Finn funksjonsuttrykket $f(x)$ som gir saldoen etter x år hvis det er

a) årlig forrentning

b) kontinuerlig forrentning

Svar:

$f(x) = 4000 \cdot 1{,}012^x$

$f(x) = 4000 \cdot (e^{0{,}012})^x$

$= 4000 \cdot e^{0{,}012x}$

4. Logaritmer

Anta $a > 0$ og $a \neq 1$.

Da er $g(x) = \log_a(x)$ den omvendte funksjonen til $f(x) = a^x$ og $D_g = V_f = \langle 0, \infty \rangle$

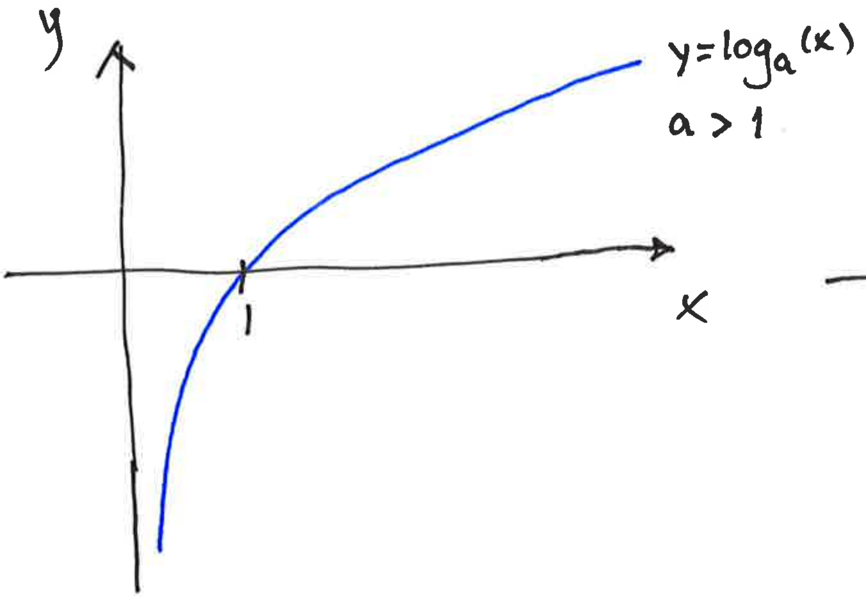
Eks: $a = 2$, $\log_2(10)$ = tallet som 2 må opphøyes i for å få 10

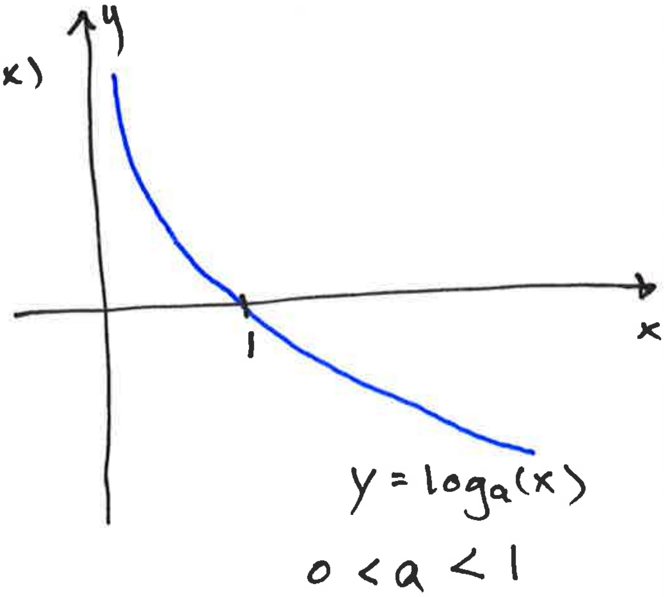
dvs $$2^{\log_2(10)} = 10$$

Fordi $2^{3,322} = 10,00$ er $\log_2(10) = 3,322$

Oppg Beregn $\log_2(16)$ og $\log_2(0,5)$ og $\log_2(1)$.

Løsn: Fordi $2^4 = 16$ er $\log_2 16 = 4$. Fordi $2^{-1} = 0,5$ er $\log_2 0,5 = -1$. Fordi $2^0 = 1$ er $\log_2 1 = 0$





Eks: $\log_2 10 = 3,322$ og $\log_2 7 = 2,807$

$2^{3,322} = 10$

$2^{2,807} = 7$

$$2^{3,322+2,807} = 2^{3,322} \cdot 2^{2,807} = 10 \cdot 7$$

Så $\log_2(10 \cdot 7) = \log_2(10) + \log_2(7)$