MET 1180, 11. forelesning, 25. okt. 2018, Runar Ile

1. Rep. & oppg.
2. Tangenter og den deriverte — kap 4.1 (og 4.4)
3. Den deriverte som funksjon — kap 4.2
4. Derivasjonsregler — kap 4.3

1. Rep. & oppg.

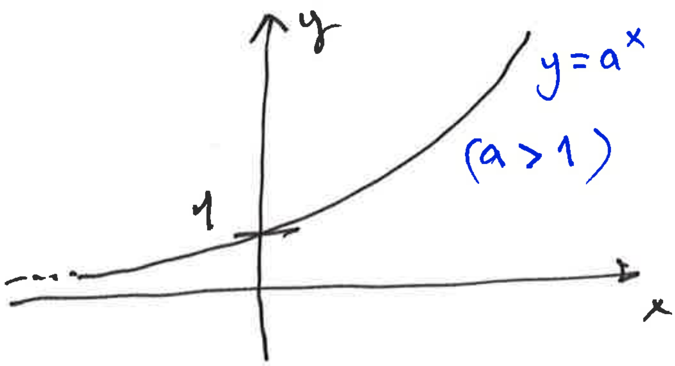
Eksponentialfunksjoner : $f(x) = a^x$

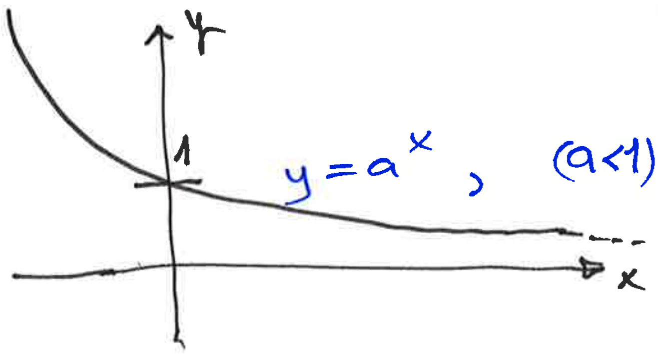
a er et fast tall og $a > 0$

*) a^x er definert for alle tall: $D_f = \mathbb{R}$ = alle reelle tall

*) a^x er positiv for alle x og $V_f = \langle 0, \infty \rangle$

*) Hvis $a > 1$ så er a^x strengt voksende
Hvis $0 < a < 1$ så er a^x strengt avtagende





Potensregler $f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y = a^{x+y} = f(x+y)$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a^x} = a^{-x} = f(-x).$$

Oppg 7c:
$$\frac{3e^x}{e^x+1} < 5$$

- kan multiplisere med e^x+1 på b.s. uten å snu ulikheten fordi $e^x+1 > 0$.

$$3e^x < 5e^x + 5$$

trekker sammen $\quad 2e^x > -5$

deler på 2: dvs $\quad e^x > -\frac{5}{2}$ som er sant for alle x.

Faktum: Hvis $a > 1$ vil a^x vokse raskere enn alle polynomfunksjoner når $x \to \infty$

<u>Oppg 8b</u> Asymptoten til

$$f(x) = (100x^3 + 70x + 1000) \cdot e^{-\frac{x}{100}}$$

$$= \frac{100x^3 + 70x + 1000}{e^{\frac{x}{100}}}$$

$$= \frac{100x^3 + 70x + 1000}{(\underbrace{e^{\frac{1}{100}}}_{a \approx 1{,}01005 > 1})^x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$

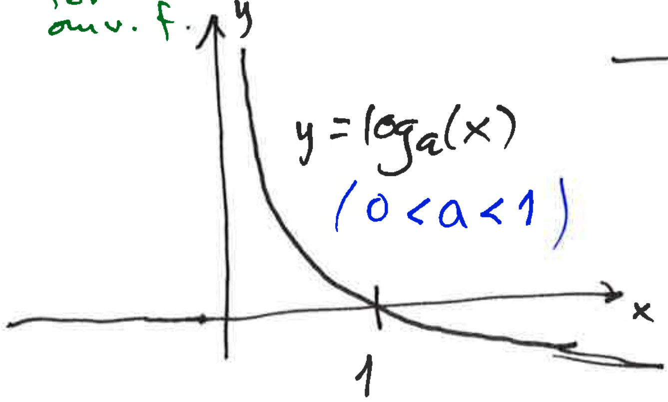
Dvs: linjen $y = 0$ er horisontal asymptote for $f(x)$.

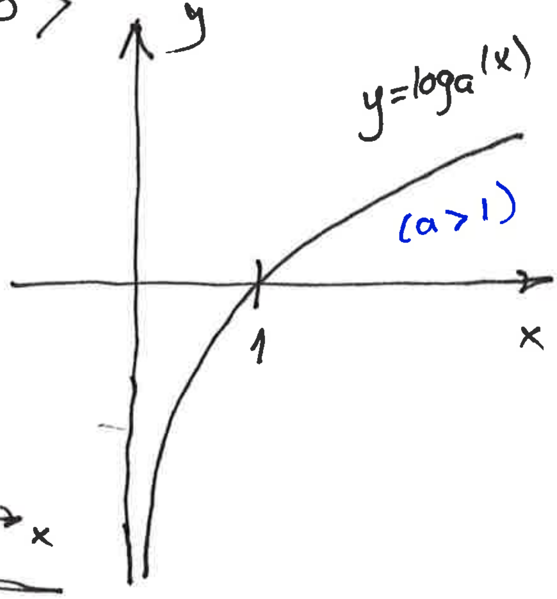
<u>Logaritmer</u> $g(x) = \log_a(x)$ for et fast tall a, $a > 0$, $a \neq 1$

er den omvendte funksjonen til $f(x) = a^x$. Derfor

vil $D_g \underset{\text{for omv funksj}}{\overset{\text{alltid}}{=}} V_f = \langle 0, \infty \rangle$

og $V_g \underset{\text{alltid for omv. f.}}{=} D_f = \mathbb{R}$





De viktigste : $f(x) = e^x$ og $g(x) = \log_e(x)$
$= \ln(x)$

$e = 2{,}7183\ldots$ (Eulers tall)

Oppg 7b $\ln(x-3) < -2$

Fordi e^x er en strengt voksende funksjon kan vi sette v.s. og h.s. inn i e^x og bevare ulikheten

$$x-3 = e^{\ln(x-3)} < e^{-2}$$

så $\underline{\underline{x < 3 + e^{-2}}}$.

Vi har $a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{\overbrace{\ln(a)}^{\text{et tall}}\cdot x}$

Eks: $1{,}023^x = \left(e^{\ln 1{,}023}\right)^x = e^{0{,}0227x}$

Tilsvarende: $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Eks: $\log_{1{,}023}(10) = \dfrac{\ln(10)}{\ln(1{,}023)} = \dfrac{2{,}306}{0{,}0227} = 101{,}26$

Sjekk: $1{,}023^{101{,}26} = 10{,}00$

Tolkning: Med 2,3% rente tar det 101 år før innskuddet har 10-doblet seg.

③

Regneregler for logaritmer

1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

Eks: $\log_{1,023}(10) = \log_{1,023}(2) + \log_{1,023}(5)$

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

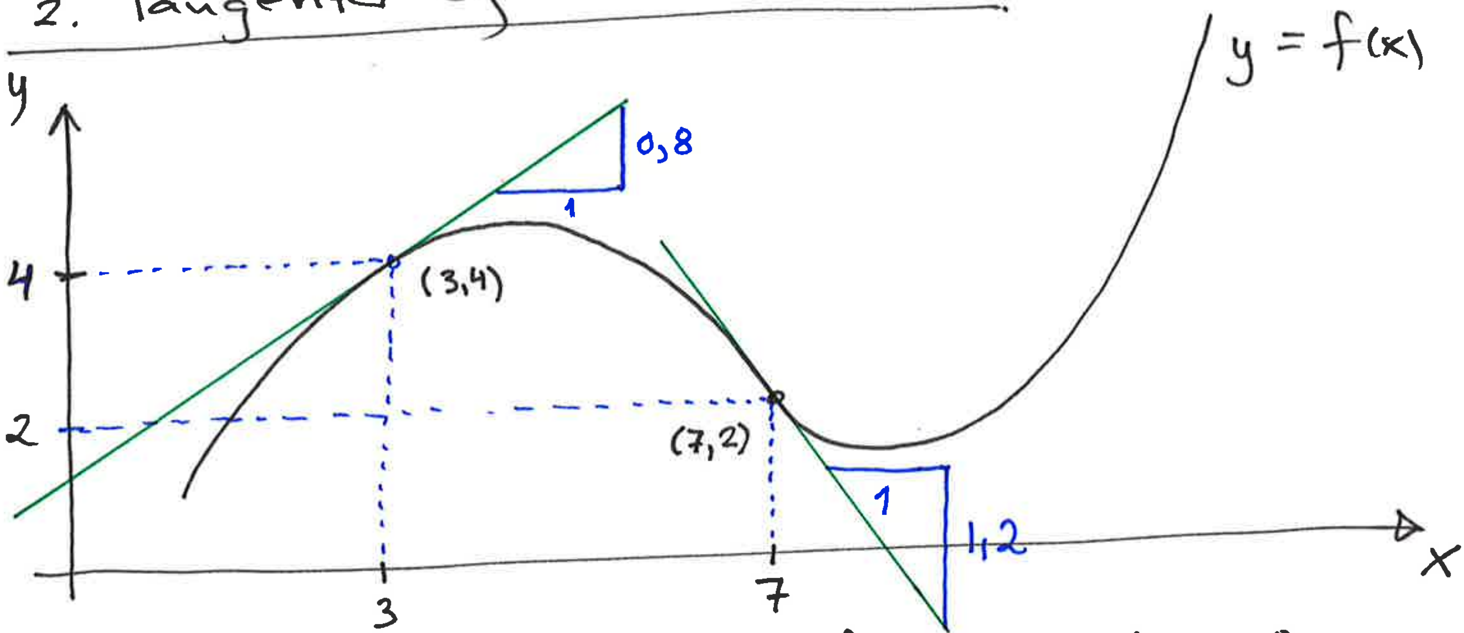
3) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$ for alle tall r

Eks: $\ln(\sqrt[10]{e}) = \ln(e^{\frac{1}{10}})$

$$= \frac{1}{10} \cdot \ln(e)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{10}}}$$

2. Taugenter og den deriverte



I punktet (3, 4) har taugeuten til f(x) stigningstall 0,8

Vi skriver $f'(3) = 0,8$

I punktet (7, 2) har taugeuten til f(x) stig. tall $-1,2$

Vi skriver $f'(7) = -1,2$

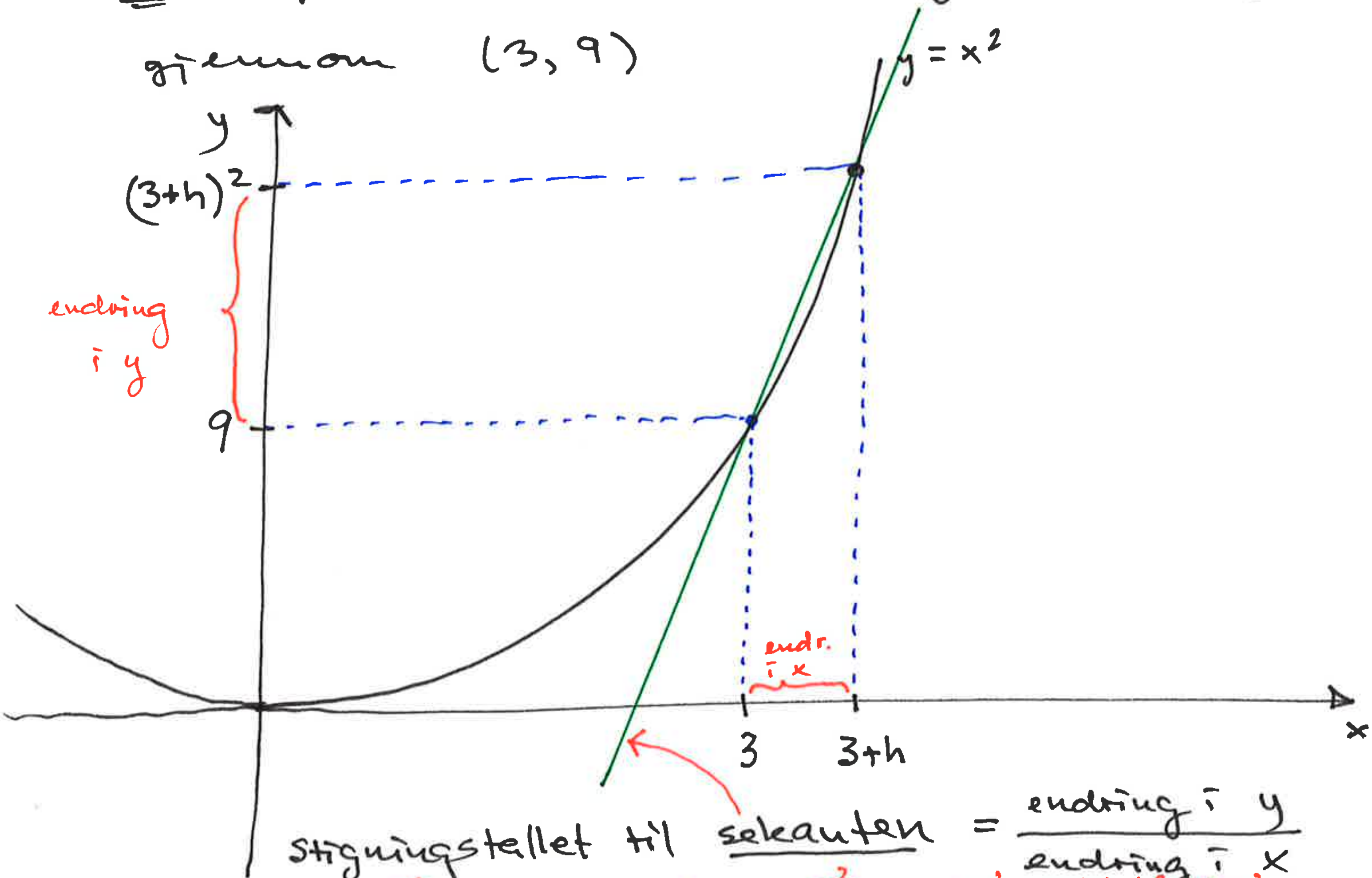
To viktige bruksområder:

1) Finne hvor funksjonen vokser og avtar og hvor den har maksimum og minimum

2) Tilnærme kompliserte funksjoner med lineære funksjoner
   - matematiske modeller i økonomi er ofte lineære

Hvordan finner vi stigningstallet til tangenten?

__Eks:__ $f(x) = x^2$. Hva er stig.tallet til tangenten gjennom $(3, 9)$



Stigningstallet til sekanten = $\dfrac{\text{endring i } y}{\text{endring i } x}$

$$= \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{(3+h)(3+h) - 9}{h} = \frac{\cancel{9} + 6h + h^2 - \cancel{9}}{h}$$

$a^2 + 2ah + h^2 - a^2$

$$= 6 + h \xrightarrow[h \to 0]{} 6$$ som derfor er stigningstallet til tangenten til $f(x)$ i $(3, 9)$.

Vi skriver $f'(3) = 6$

3. Den deriverte som en funksjon

Hvis vi setter $x = a$ i stedet for $x = 3$

får vi $f'(a) = 2a$

– den deriverte er en funksjon !

$$f'(x) = 2x$$

Eks: Stigningstallet til tangenten til $f(x) = x^2$ i punktet $(-3, 9)$ er $f'(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$

Vi kan gjøre det samme med $f(x) = x^3$

Får (med mer regning) $f'(x) = 3x^2$

4. Derivasjonsregler.

Mønsteret : (potensregelen)

$$\boxed{f(x) = x^n \text{ gir } f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

NB : Gjelder for alle tall n

Eks: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ så $n = \frac{1}{3}$

og $n - 1 = \frac{1}{3} - 1 = \frac{1-3}{3} = -\frac{2}{3}$

så potensregelen gir $f'(x) = +\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

<u>Addisjonsregelen</u>: Hvis $f(x) = g(x) + h(x)$

så er $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

<u>Konstantregelen</u>: Hvis k et (konstant) tall

og $f(x) = k \cdot g(x)$, så er

$$f'(x) = k \cdot g'(x)$$

<u>Eks</u>: $k = 7$ og $g(x) = x^2$ så er $f(x) = 7 \cdot x^2$

Da er $f'(x) = 7 \cdot 2x = 14x$

<u>Produktregelen</u>: Hvis $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

så er $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

<u>Eks</u>: $f(x) = (5x^3 - 2x + 1) \cdot (3x + 7)$

Skal finne $f'(x)$ v.h.a. produktregelen.

Setter $g(x) = 5x^3 - 2x + 1$, $h(x) = 3x + 7$

$$g'(x) = 5 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 2 \cdot 1 \cdot x^{1-1} + 0$$

$$= 15x^2 - 2$$

husk paranteser!

$$h'(x) = 3$$

så $f'(x) = (15x^2 - 2)(3x + 7) + (5x^3 - 2x + 1) \cdot 3$

$$\overset{\text{regner}}{=} \underline{\underline{60x^3 + 105x^2 - 12x - 11}}$$

Brøkregelen

Anta $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

Da er $f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

Eks: $f(x) = \frac{3x+1}{2x+5}$. Finner $f'(x)$ ved å bruke brøkregelen. Setter

$g(x) = 3x+1$ så $g'(x) = 3$

$h(x) = 2x+5$ så $h'(x) = 2$

husk paranteser!

Da er $f'(x) = \frac{3 \cdot (2x+5) - (3x+1) \cdot 2}{(2x+5)^2}$

$$= \frac{3 \cdot 2x + 3 \cdot 5 - (\overset{6x}{2 \cdot 3x} + \overset{2}{2 \cdot 1})}{(2x+5)^2}$$

$$= \frac{\cancel{6x} + 15 - \cancel{6x} - 2}{(2x+5)^2}$$

$$= \frac{13}{(2x+5)^2}$$

Kjerneregeln

Hvis $f(x) = g(\underbrace{u(x)}_{\text{kjernen}})$

så er

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$$

Eks: $f(x) = (x^2+2)^{10}$. Beregner $f'(x)$

ved å bruke kjerneregelen med

$u(x) = x^2+2$ og $g(u) = u^{10}$

$u'(x) = 2x$ og $g'(u) = 10u^9$

Da er $f'(x) = 10u^9 \cdot 2x$

$$= 10 \cdot (x^2+2)^9 \cdot 2x$$

$$= \underline{\underline{20x(x^2+2)^9}}.$$

To viktige funksjoner.

$f(x) = e^x$ og $g(x) = \ln(x)$

$f'(x) = e^x$ og $g'(x) = \frac{1}{x}$

Oppg: Finn $f'(x)$.

a) $f(x) = e^{1{,}023x}$

b) $f(x) = x^2 \ln(x)$

c) $f(x) = \sqrt{e^x+9}$

d) $f(x) = [\ln(x)]^2$

Løsning:

a) $u(x) = 1{,}023x \quad , \quad u'(x) = 1{,}023$

$g(u) = e^u \quad , \quad g'(u) = e^u$

så $f'(x) \overset{\text{kjerner.}}{=} e^u \cdot 1{,}023 = \underline{\underline{1{,}023 \cdot e^{1{,}023x}}}$

b) $g(x) = x^2 \quad , \quad g'(x) = 2x$

$h(x) = \ln x \quad , \quad h'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) \overset{\text{produktr.}}{=} 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x}$

$= \underline{\underline{2x\ln(x) + x}}$

c) $u(x) = e^x + 9 \quad , \quad u'(x) = e^x$

$g(u) = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \quad , \quad g'(u) = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{u}}$

så $f'(x) \overset{\text{kjerne}}{=} \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot e^x$

$= \underline{\underline{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+9}}}}$

d) $u(x) = \ln(x) \quad , \quad u'(x) = \frac{1}{x}$

$g(u) = u^2 \quad , \quad g'(u) = 2u$

så $f'(x) \overset{\text{kjerne}}{=} 2u \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{\frac{2\ln(x)}{x}}}$