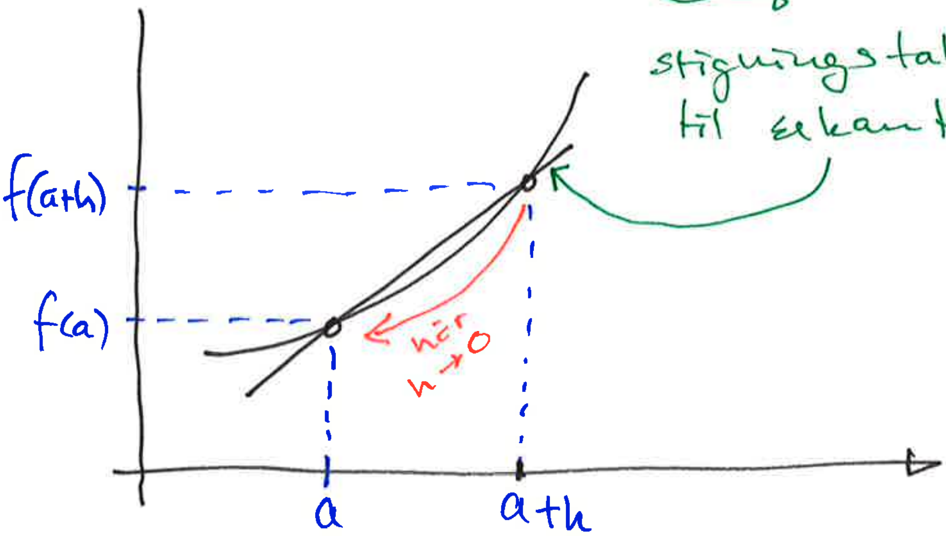
MET 1180, 12. forelesning, 1. nov. 2018, Runar Ile

1. Rep. & oppg.
2. Funksjonsdrøfting med maks/min.

Kap 4.6

1. Rep. og oppg.

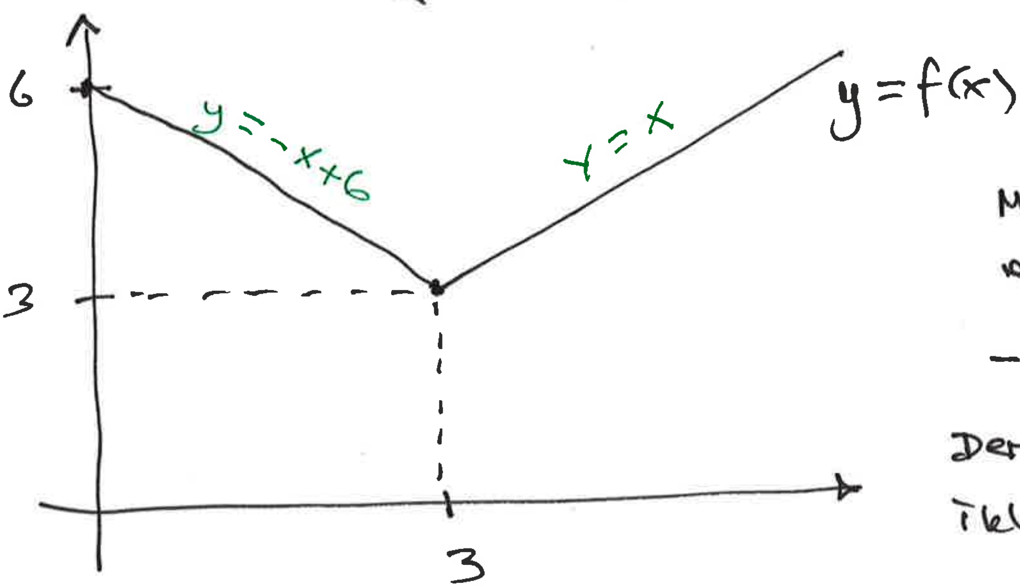
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\text{stigningstallet til sekanten}}$$



NB: Det er ikke alltid at den deriverte finnes!

Eks: $f(x) = |x-3| + 3 = \begin{cases} -(x-3)+3, & x-3<0 \\ x-3+3, & x-3 \geq 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} -x+6, & x<3 \\ x, & x \geq 3 \end{cases}$$



Her er $f'(x) = \begin{cases} -1, & x<3 \\ 1, & x>3 \end{cases}$

Men for $x = 3$ er det ingen tangent! – et knekkpunkt

Dermed finnes ikke $f'(3)$.

Vanskelig å bruke definisjonen av $f'(a)$.

Lettere å finne den deriverte funksjonen $f'(x)$

Grunnleggende resultater:

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \text{for alle } n$$

Eks: $(x^{3,19})' = 3,19 \cdot x^{2,19}$

Produktregelen: $[g(x) \cdot h(x)]' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Oppg 3h $\quad f(x) = 30\underbrace{x^2 e^x}\underbrace{\ln(x)}$

$$f'(x) \overset{\text{prod. reg.}}{=} 30\left([x^2e^x]' \cdot \ln(x) + x^2e^x \cdot [\ln(x)]'\right)$$

$$\overset{\text{prod. reg.}}{=} 30\left([2xe^x + x^2e^x] \cdot \ln(x) + x^2e^x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= 30\left([2x + x^2]\ln(x)e^x + xe^x\right)$$

$$= \underline{\underline{30x\left((2+x)\ln(x) + 1\right)e^x}}$$

Brøkregelen: $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, så $f'(x) = \dfrac{g'(x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

Oppg 4h: $f(x) = \dfrac{2\ln(x)}{3e^x}$ gir

$$f'(x) = \frac{[2\ln(x)]'\cdot 3e^x - 2\ln(x)\cdot[3e^x]'}{(3e^x)^2}$$

$$= \frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot 3e^x - 2\ln(x)\cdot 3e^x}{9e^{2x}} \quad \Big|\cdot \frac{x}{x} = 1$$

$$= \frac{6e^x - 6x\ln(x)e^x}{9x\,e^{2x}}$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{6}}\cdot(1 - x\ln(x))\cdot\cancel{e^x}}{\underset{3}{\cancel{9}}\cdot x\cdot e^{\cancel{2x}}} = \underline{\underline{\frac{2(1-x\ln(x))}{3xe^x}}}$$

Kjerneregelen: $f(x) = g(u(x))$, $f'(x) = g'(u(x))\cdot u'(x)$

Oppg 5, siste: $f(x) = \dfrac{2}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

$$\boxed{\begin{array}{ll}\text{setter} & u(x) = 2x+1 \\ \text{så} & u'(x) = 2\end{array}}$$

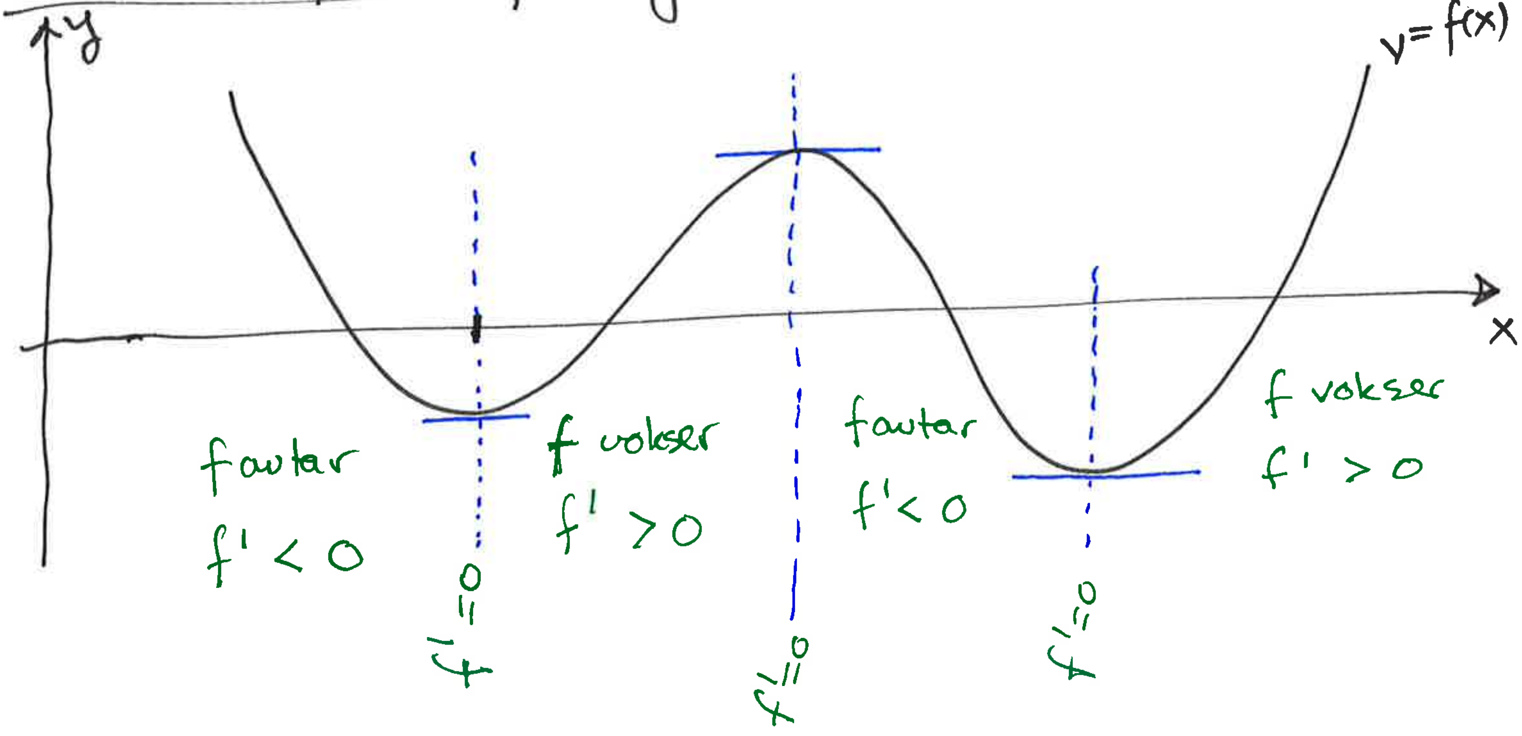
og $g(u) = \dfrac{2}{u\sqrt{u}} = \dfrac{2}{u^{1,5}} = 2u^{-1,5}$

så $g'(u) = 2\cdot(-1,5)u^{-2,5} = \dfrac{-3}{u^2\sqrt{u}}$

$$f'(x) \overset{\text{kjerner.}}{=} -\frac{3}{(2x+1)^2\sqrt{2x+1}}\cdot 2$$

$$= \underline{\underline{\frac{-6}{(2x+1)^2\sqrt{2x+1}}}} = \underline{\underline{-6(2x+1)^{-2,5}}}$$

2. Funksjonsdrøfting med maks/min.



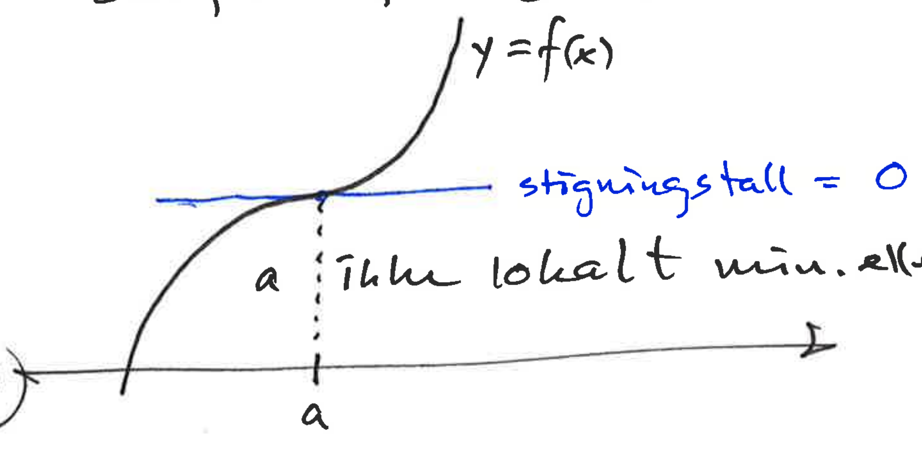
Der $f'(x)$ er positiv, er grafen til $f(x)$ voksende

Der $f'(x)$ er negativ, ——— " ——— avtagende

Viktig konklusjon : Fortegnsskjema for $f'(x)$ angir hvor $f(x)$ vokser og avtar.

$x = a$ lokalt minimumspunkt : $f'(a) = 0$ og $f'(x)$ skifter fortegn fra $-$ til $+$

$x = a$ lokalt maks.pkt. : $f'(a) = 0$ og $f'(x)$ skifter fortegn fra $+$ til $-$.



Definisjon: Hvis $f'(a) = 0$ er $x = a$ et stasjonært punkt

Eks: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

Stasjonære punkter: Løser likningen $f'(x) = 0$

$$f'(x) = (x^3)' - 6(x^2)' + (5)'$$

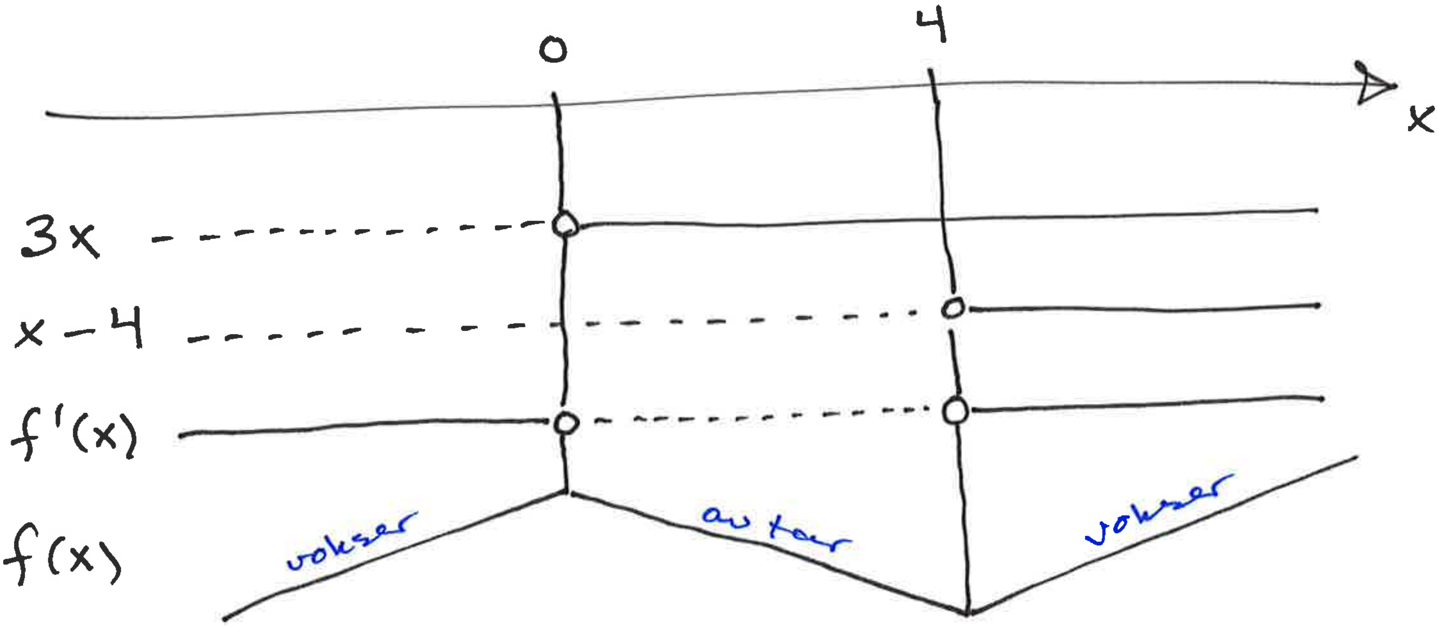
potensr.

$$= 3x^2 - 6 \cdot 2x + 0 = 3x^2 - 12x$$

$$= 3x(x-4)$$

$f'(x) = 0$ har derfor løsninger $x = 0$ og $x = 4$

Hvor vokser/avtar $f(x)$? Vi drøfter fortegnet til $f'(x)$ i et fortegnsskjema:



$f(x)$ er strengt voksende for $x \leq 0$

$f(x)$ —— " —— $x \geq 4$

$f(x)$ er strengt avtagende for $0 \leq x \leq 4$

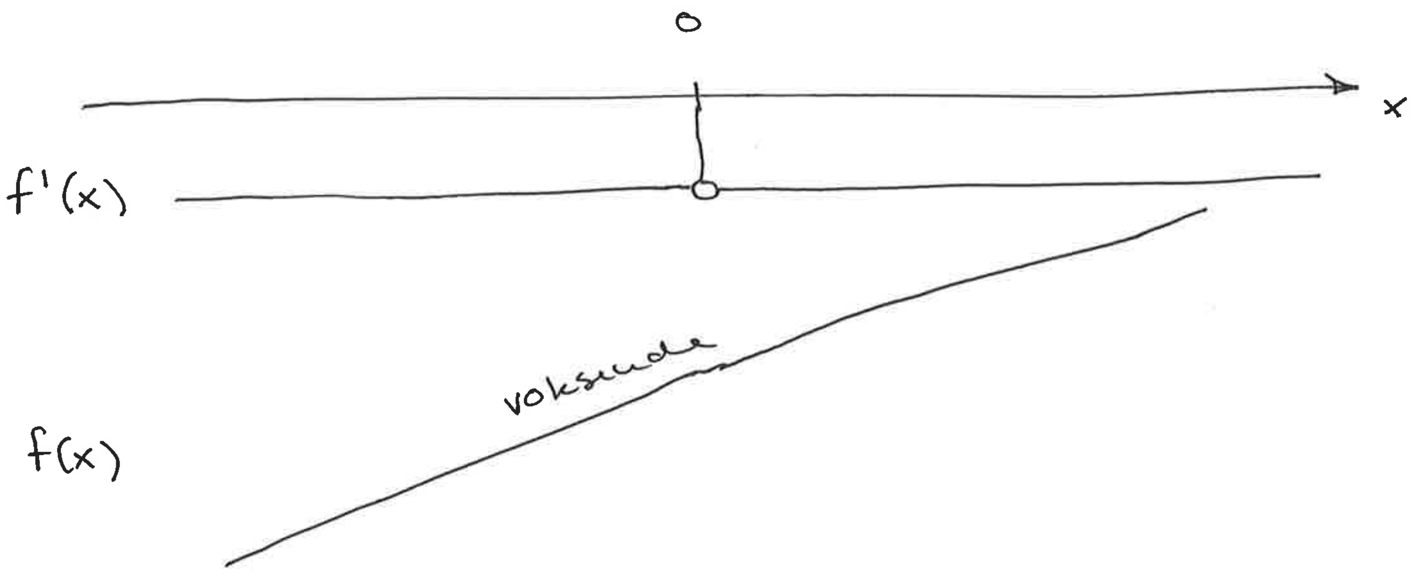
Dermed er $x = 0$ et lokalt maks.punkt og $x = 4$ et lokalt min.punkt

Eks: $f(x) = x^3$ gir $f'(x) = 2x^3$

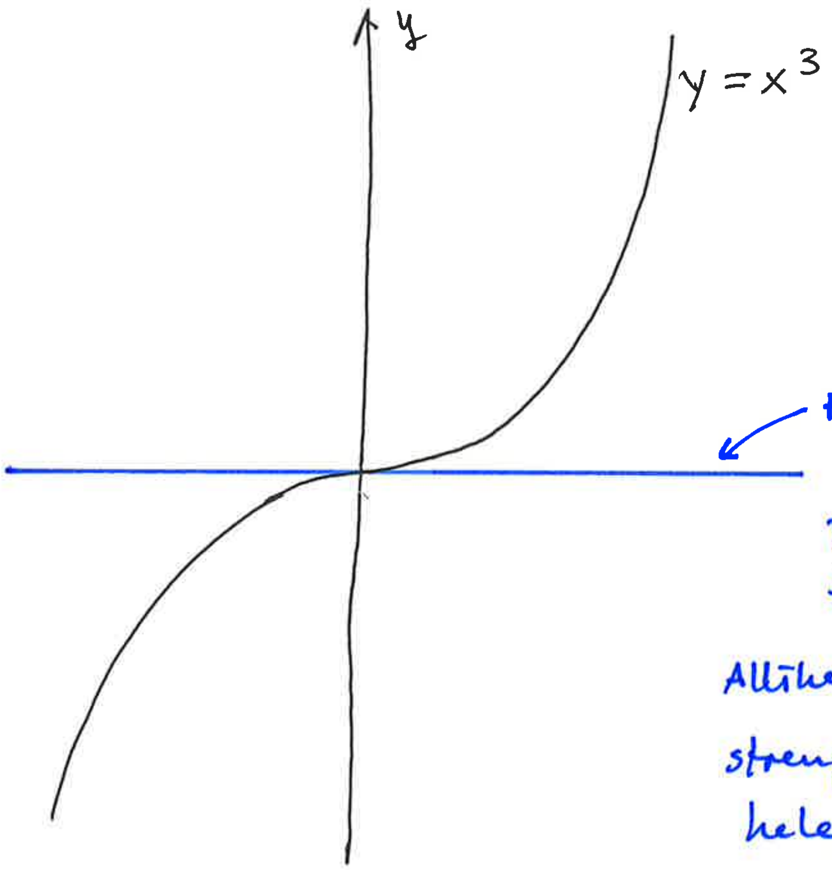
Stasjonære punkter: $f'(x) = 0$

dvs $2x^3 = 0$

dvs $\underline{\underline{x = 0}}$ (så $f'(0) = 0$)



Så $f(x)$ er strengt voksende for $x \in \mathbb{R}$ (alle reelle tall)



tangenten til $y = f(x)$ for $x = 0$

Den har stigningstall $f'(0) = 0$

Allikevel er $f(x)$ strengt voksende i hele $\mathbb{R}$.

Eks $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ og $D_f = [-1, 7]$

Ekstremverdisetningen: Hvis $f(x)$ er kontinuerlig på intervallet $D_f = [a, b]$ så har $f(x)$ et maksimum (glob.) og et minimum (glob.)

Mulige maks/min.-punkter:

* stasjonære punkter (hos $x = 0$, $x = 4$)
* knekkpunkter ($f'(a)$ ikke definert)
  – ingen i dette eks.
* endepunkter: $x = -1$, $x = 7$

Må sammenligne verdiene:

$f(0) \overset{\text{regner}}{=} 5$, $\quad f(4) \overset{\text{regner}}{=} -27$

$f(-1) \overset{\text{regner}}{=} -2$, $\quad f(7) \overset{\text{regner}}{=} 54$

Så $x = 4$ gir minimum $f(4) = \underline{\underline{-27}}$

og $x = 7$ gir maksimum $f(7) = \underline{\underline{54}}$

Se GeoGebrafilen „Eks.ggb"

Oppg. Vi har $f(x) = \dfrac{(x-3)(x-5)}{x^2-x+1}$

a) Bestem de stasjonære punktene til $f(x)$.

b) Angi/pre hvor $f(x)$ er strengt voksende / avtagende.

c) Finn (eventuelle) lokale maks/min. punkter

d) Angi/er hvilke av de lokale maks/min.pkt. som er globale maks/min. punkter og beregn maksimum og minimum til $f(x)$.

Løsn: (a) Beregner $f'(x)$ og løser likningen $f'(x)=0$

$$f(x) = \frac{x^2-8x+15}{x^2-x+1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-8)(x^2-x+1)-(x^2-8x+15)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

regner...

$$= \frac{7x^2-28x+7}{(x^2-x+1)^2} = 7\cdot\frac{(x^2-4x+1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$f'(x)=0$ gir dermed $x^2-4x+1=0$

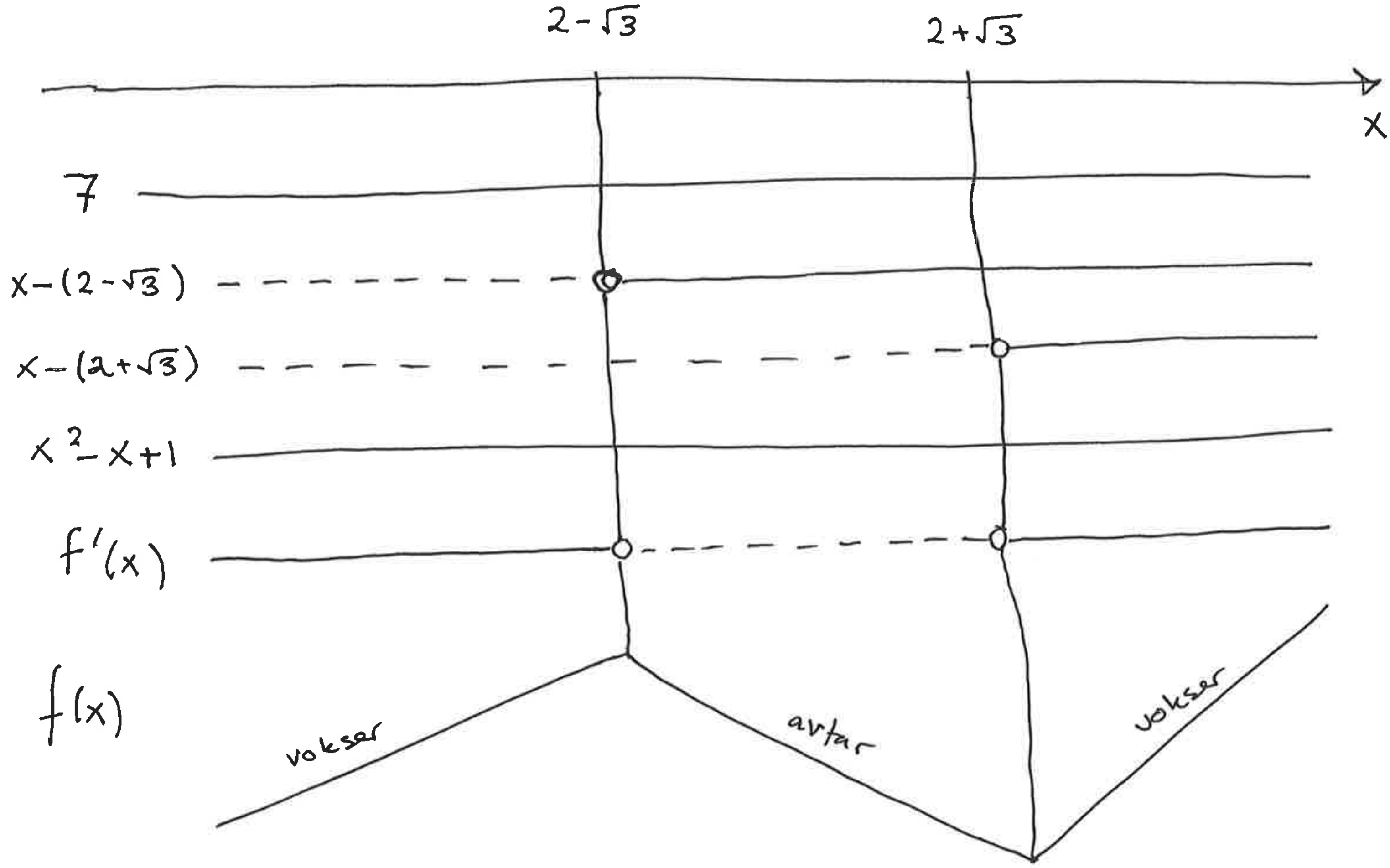
med løsninger $\underline{\underline{x = 2 \pm \sqrt{3}}}$.

(som er omtrent 0,27 og 3,73)

b) Vi tegner fortegnsskjema for

$$f'(x) = \frac{7(x-(2-\sqrt{3}))(x-(2+\sqrt{3}))}{(x^2-x+1)^2}$$

NB : $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ for alle x



Så $f(x)$ er strengt voksende i intervallet $\langle -\infty, 2-\sqrt{3}]$

$f(x)$ er strengt avtagende i intervallet $[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$

$f(x)$ er strengt voksende i intervallet $[2+\sqrt{3}, \infty\rangle$

c) Dermed er $2-\sqrt{3}$ et lokalt maksimumspunkt og $2+\sqrt{3}$ er et lokalt minimumspunkt

d) Linjen $y = 1$ er en horisontal asymptote for $f(x)$:

$$(x^2 - 8x + 15) : (x^2 - x + 1) = 1 + \frac{-7x + 14}{x^2 - x + 1}$$

$$\frac{-(x^2 - x + 1)}{-7x + 14}$$

Vi ser at $\frac{-7x+14}{x^2-x+1}$ er større enn 0 for $x < 2$

og mindre enn 0 for $x > 2$. Dermed får vi

at $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 1^+$ [nærmer seg 1 ovenfra]

og $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 1^-$ [nærmer seg 1 nedenfra]

Vi beregner $f(2-\sqrt{3}) = \frac{(2-\sqrt{3})^2 - 8(2-\sqrt{3}) + 15}{(2-\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3}) + 1}$

$$= \frac{4 - 4\sqrt{3} + 3 - 16 + 8\sqrt{3} + 15}{4 - 4\sqrt{3} + 3 - 2 + \sqrt{3} + 1} = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{6 - 3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6 + 4\sqrt{3}}{6 - 3\sqrt{3}} \cdot \frac{6 + 3\sqrt{3}}{6 + 3\sqrt{3}} = \frac{36 + 18\sqrt{3} + 24\sqrt{3} + 12 \cdot 3}{36 - 9 \cdot 3}$$

$= \frac{72 + 42\sqrt{3}}{9} = 16{,}08$ som er større enn 1

og derfor det globale maksimum for $f(x)$.

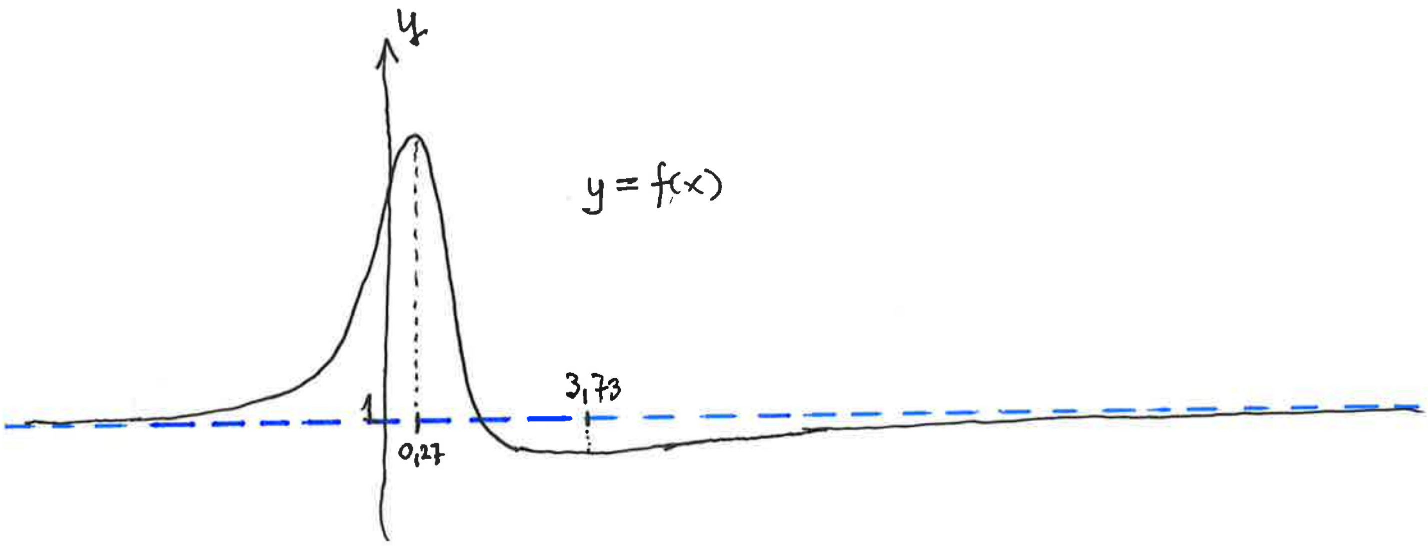
Vi beregner $f(2+\sqrt{3}) = \dfrac{(2+\sqrt{3})^2 - 8(2+\sqrt{3}) + 15}{(2+\sqrt{3})^2 - (2+\sqrt{3}) + 1}$

$$= \frac{4 + 4\sqrt{3} + 3 - 16 - 8\sqrt{3} + 15}{4 + 4\sqrt{3} + 3 - 2 - \sqrt{3} + 1} = \frac{6 - 4\sqrt{3}}{6 + 3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6 - 4\sqrt{3}}{6 + 3\sqrt{3}} \cdot \frac{6 - 3\sqrt{3}}{6 - 3\sqrt{3}} = \frac{36 - 18\sqrt{3} - 24\sqrt{3} + 12 \cdot 3}{9}$$

$$= \frac{72 - 42\sqrt{3}}{9} = -0,08$$ som er mindre enn 1

og derfor det globale minimum for $f(x)$.



Se GeoGebrafilen

„Oppg. ggb"