MET 1180, 13. forelesning, 8. nov. 2018, Runar Ile

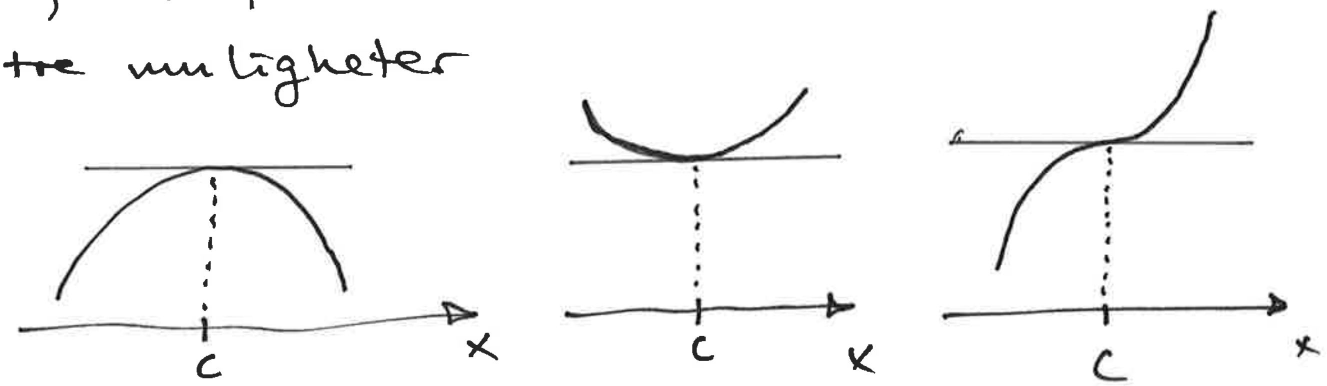
1. Rep. & oppg.
2. Implisitt derivasjon — kap. 4.5
3. Den annenderiverte og krumning — kap 4.7

---

1. <u>Rep. & oppg.:</u>

Stasjonært punkt: En x-verdi c der $f'(c) = 0$

– tre muligheter

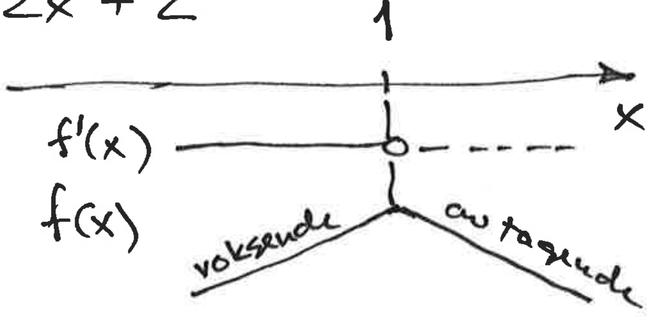


lokalt maks. — lok. min. — terrassepunkt – hverken lok. maks. eller min.

Bruker fortegnsskjema for $f'(x)$ for å avgjøre hvor $f(x)$ er strengt voksende $(f' > 0)$ og hvor $f(x)$ er strengt avtagende $(f' < 0)$

<u>Eks</u>: $f(x) = 100 - x^2 + 2x$

$f'(x) = 0 - 2x + 2 \cdot 1 = -2x + 2$



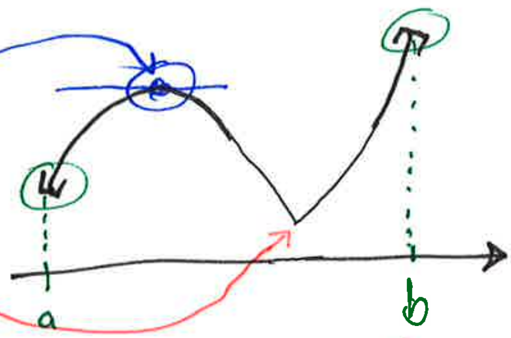
$f(x)$ strengt avtagende i intervallet $[1, \infty\rangle$

og $f(x)$ strengt voksende i intervallet $\langle -\infty, 1]$

Dermed er $x = 1$ et globalt maksimumspunkt og maksimum for $f(x)$ er $f(1) = 100 - 1^2 + 2 \cdot 1 = \underline{\underline{101}}$

Hvis definisjonsmengden til $f(x)$ er et lukket intervall $[a, b]$ har $f(x)$ et maksimum og et minimum.

Mulighetene:



*) Stasjonære punkter

*) Knekkpunkter

*) Endepunktene a og b

Regner ut verdiene til $f(x)$ i disse punktene og sammenligner

<u>Oppg 5c</u> $f(x) = \ln(1+e^{-x})$, $D_f = [4, 5]$

Vil finne maks/min.

Stasjonære punkter: Løser likningen $f'(x) = 0$

Finner $f'(x)$ ved å bruke kjerneregelen to ganger:

1) setter $g(u) = \ln(u)$ og $u(x) = 1 + e^{-x}$

Får $g'(u) = \frac{1}{u}$ og $u'(x) = 0 + (e^{-x})'_x$

$$\overset{(2)}{=} -e^{-x}$$

Så $f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$

$$= \frac{1}{1+e^{-x}} \cdot (-e^{-x}) = -\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \Big| \cdot \frac{e^x}{e^x}$$

$$= -\frac{1}{e^x + 1}$$ som er mindre enn 0 for alle x.

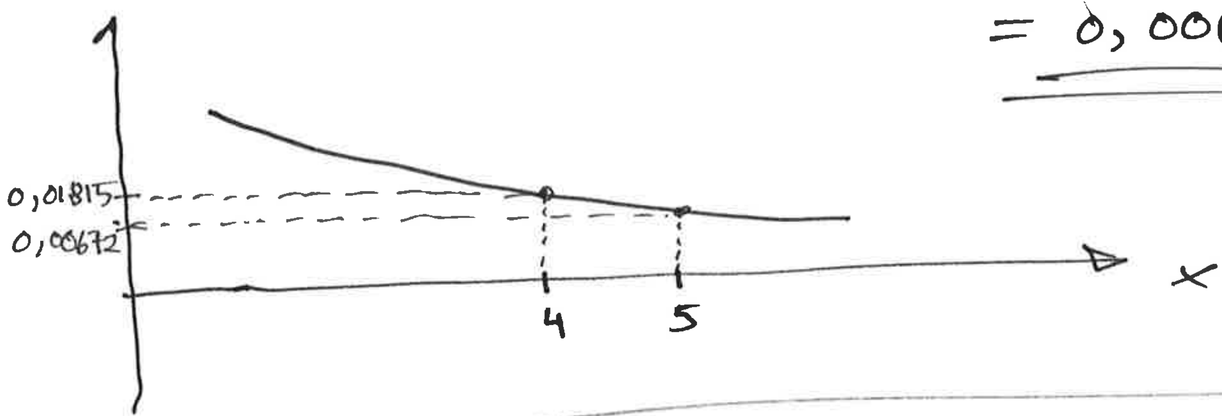
Altså er $f(x)$ strengt avtagende for alle x.

– ingen stasjonære punkter.

Det er ingen knekkpunkter ($f'(x)$ finnes for alle x).

Dermed gir $x = 4$ maksimum $f(4) = \ln(1+e^{-4})$
$= 0{,}01815$

og $x = 5$ gir minimum $f(5) = \ln(1+e^{-5})$
$= 0{,}00672$



2. Implisitt derivasjon.

Eks: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f'(x) = (-1)\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

– vanlig derivasjon.

setter $y = f(x)$, så $y = \frac{1}{x}$ $\quad | \cdot x$

får $xy = 1$

Deriverer vs. og hs. med hensyn på x:

$(xy)'_x = (1)'_x$

Produktregelen gir

$(x)'\cdot y + x\cdot y' = 0$

dvs $\quad 1 \cdot y + x \cdot y' = 0$

Kan løse denne likningen for y' :

$$x \cdot y' = -y$$

dvs $$y' = -\frac{y}{x} \quad \left(= -\frac{\frac{1}{x}}{x} = -\frac{1}{x^2}\right)$$

Poenget : Vi behøver ikke kjenne uttrykket for $y(x)$!

Dette kalles implisitt derivasjon.

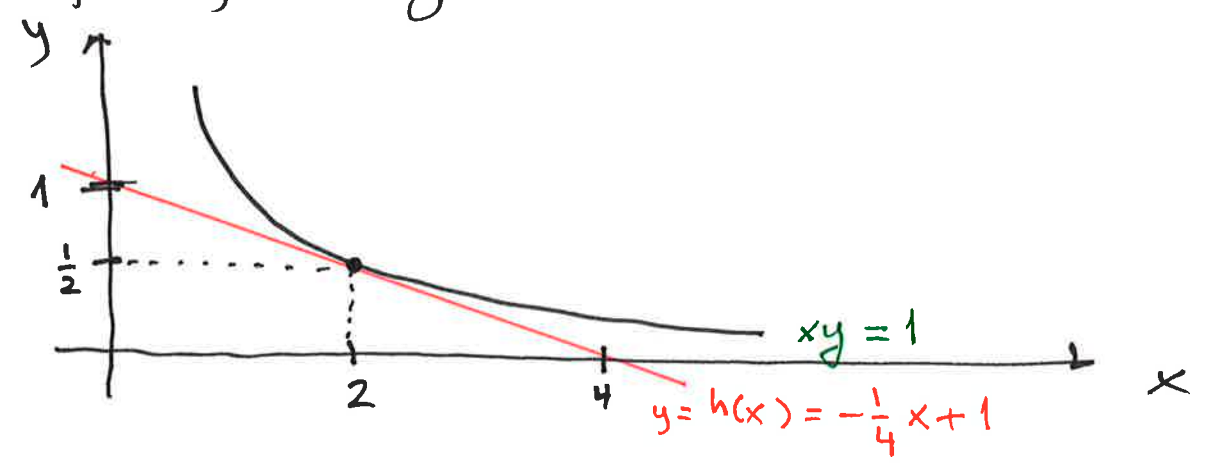
F. eks. hvis $x = 2$ så er $2 \cdot y = 1$

dvs $y = \frac{1}{2}$ og $y' \underset{y=\frac{1}{2}}{\overset{x=2}{=}} -\frac{\frac{1}{2}}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$.

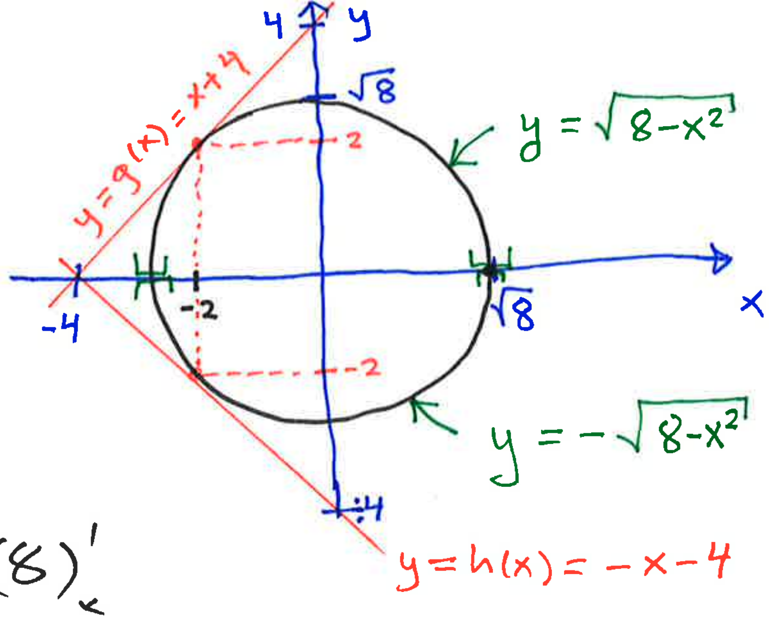
Ettpunktsformelen : $h(x) - \underbrace{\frac{1}{2}}_{y_0} = \underbrace{-\frac{1}{4}}_{y_0'}(x - \underbrace{2}_{x_0})$

så $h(x) = -\frac{1}{4}x + 1$

- funksjonsuttrykket til tangenten : $(2, \frac{1}{2})$.



Eks: $x^2 + y^2 = 8$



Sirkelen består av alle løsninger (x, y) til likningen.

Deriverer begge sider av likningen

$$(x^2)'_x + (y^2)'_x = (8)'_x$$

potensregel + kjerneregelen

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

Løser likningen for y'.

$$y' = -\frac{x}{y}$$

F.eks. $\underline{x=-2}$ gir $(-2)^2 + y^2 = 8$, dvs $y = \pm 2$

For $\underline{y=-2}$: $y' = -\frac{-2}{-2} = -1$ og

tangentfunksjonen: $h(x) - (-2) = (-1)\cdot(x - (-2))$

så $h(x) = \underline{\underline{-x-4}}$

For $\underline{y=2}$: $y' = -\frac{-2}{2} = 1$ og

tangentfunksjonen: $g(x) - (+2) = 1 \cdot (x - (-2))$

får $g(x) = \underline{\underline{x+4}}$

Oppg En kurve er implisitt definert ved at

$$y^2 - x^3 = 1$$

a) Uttrykk y' ved hjelp av y og x ved implisitt derivasjon

b) Finn alle løsninger for y når $x = 2$

c) Beregn y' for disse punktene.

Løsning: a) $(y^2)'_x - (x^3)'_x = (1)'$

$$2y \cdot y' - 3x^2 = 0$$

Løser for y'

$$y' = \frac{3x^2}{2y}$$

b) $x = 2$: $y^2 - 2^3 = 1$

dvs $y^2 = 9$ dvs $y = \pm 3$

c) $(2, -3)$: $y' = \dfrac{3 \cdot 2^2}{2 \cdot (-3)} = -2$

$(2, 3)$: $y' = \dfrac{3 \cdot 2^2}{2 \cdot 3} = 2$

3. Den annenderiverte og krumning

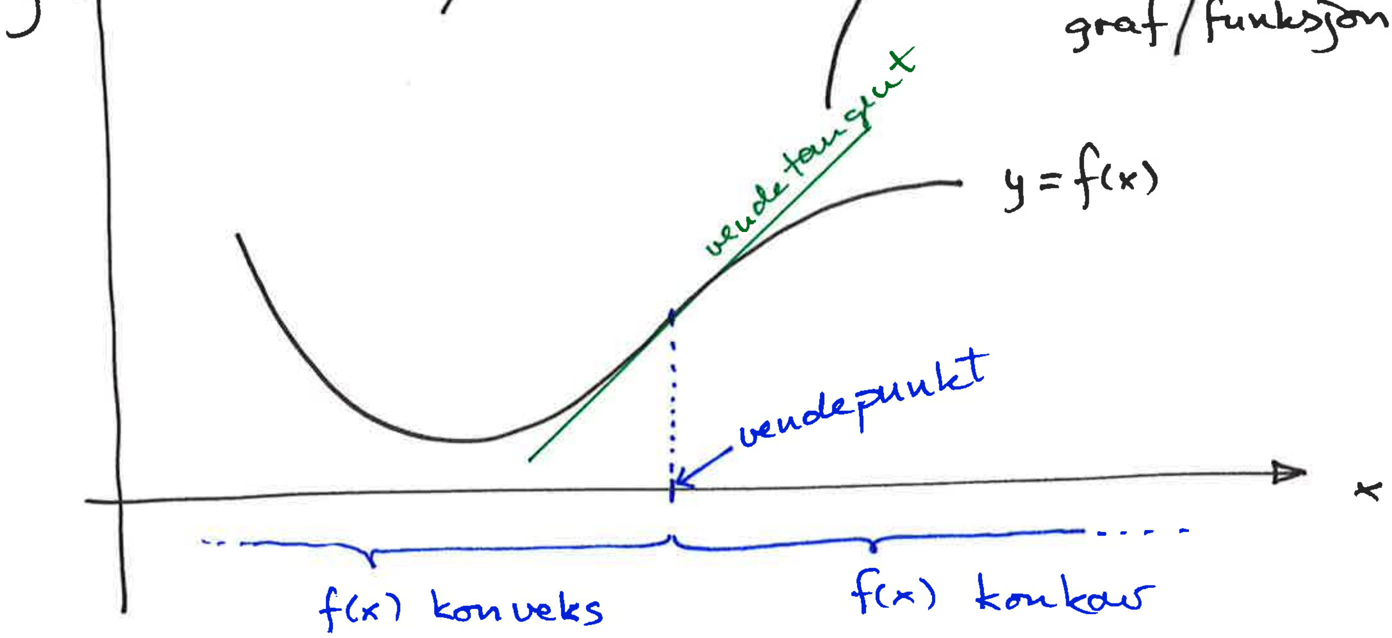
Hvilken vei krummer grafen?

– krummer opp:

konveks
graf/funksjon

– krummer ned:

konkav
graf/funksjon



<u>Definisjon</u>: $f(x)$ er konveks (eller konkav) på intervallet $[a, b]$ hvis

$f''(x) \geq 0$ for alle x i $\langle a, b \rangle$ (dvs $a < x < b$)

(eller $f''(x) \leq 0$ ——— " ———)

$f(x)$ konveks: Den deriverte til $f'(x)$ er positiv, dvs $f'(x)$ er en <u>voksende</u> funksjon

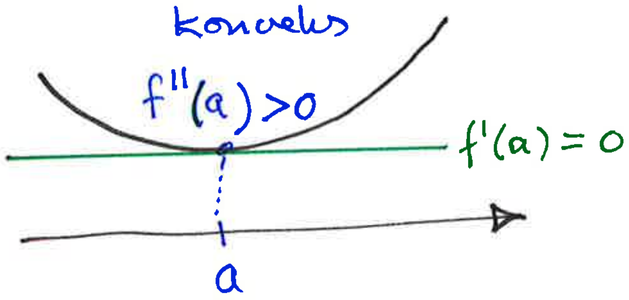
$f(x)$ konkav: Den deriverte til $f'(x)$ er negativ, dvs $f'(x)$ er en <u>avtagende</u> funksjon

<u>Definisjon</u>: $x=a$ er et <u>vendepunkt</u> for $f(x)$ hvis $f''(x)$ endrer fortegn ved $x=a$.

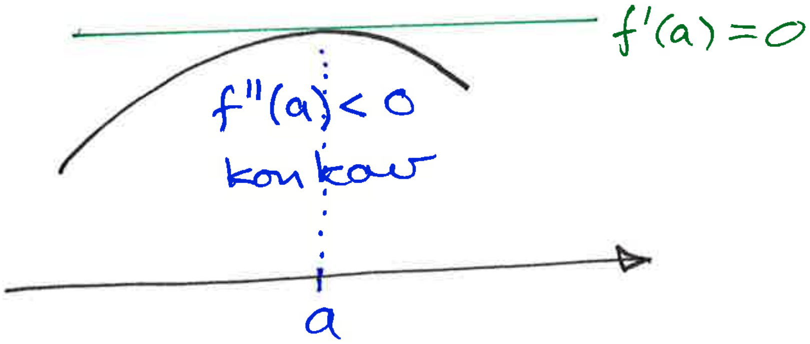
Vendetangent: Tangenten til $f(x)$ i et vendepunkt

Annenderiverttesten: Anta $x=a$ er stasjonært punkt for $f(x)$.

Hvis $f''(a) > 0$ så er $x=a$ et lokalt minimumspunkt



Hvis $f''(a) < 0$ så er $x=a$ et lokalt maksimumspunkt



<u>Eks</u>: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

Da er $f'(x) = 3x^2 - 3\cdot 2x + 0 = 3x^2 - 6x$

Stasjonære punkter: De x slik at $f'(x) = 0$

dvs $3x^2 - 6x = 0$ dvs $3x(x-2) = 0$

dvs $\underline{x=0}$ el. $\underline{x=2}$

Vil bruke annenderivertesten:

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - 6x)' = 3\cdot 2x - 6\cdot 1$$
$$= 6x - 6$$

Setter inn de stasjonære punktene:

$f''(0) = -6 < 0$ og $f''(2) = 6\cdot 2 - 6 = 6 > 0$

Dvs $x = 0$ er et lokalt maksimumspunkt og $x = 2$ er et lokalt minimumspunkt.

Konveks optimering.

Hvis $f(x)$ er konveks i hele definisjonsområdet, så vil ethvert stasjonært punkt gi globalt minimum.

Hvis $f(x)$ er konkav i hele definisjonsområdet, så vil ethvert stasjonært punkt gi globalt maksimum.

Eks: $f(x) = \dfrac{e^x}{x-2}$, $D_f = \langle 2, \infty \rangle$

Vil finne evt. maks/min.

$$f'(x) \overset{\text{brøk-}}{\underset{\text{regel}}{=}} \frac{(e^x)'(x-2) - e^x(x-2)'}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{e^x(x-2) - e^x}{(x-2)^2} = \frac{(x-3)e^x}{(x-2)^2}$$

så $f'(x) = 0$ har løsning $\underline{x = 3}$ (eneste stasjonære punktet)

$$f''(x) = \frac{[(x-3)e^x]' \cdot (x-2)^2 - (x-3)e^x \cdot [(x-2)^2]'}{[(x-2)^2]^2}$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)}\boxed{e^x} \cdot (x-2)^2 - (x-3)\boxed{e^x} \cdot 2\cancel{(x-2)} \cdot 1}{(x-2)^{\cancel{4}\, 3}}$$

Hjelperegning: $((x-3)e^x)' = (x-3)' \cdot e^x + (x-3) \cdot (e^x)'$

$= 1 \cdot e^x + (x-3) \cdot e^x = (x-2)e^x$

$$= \frac{[(x-2)^2 - 2(x-3)]e^x}{(x-2)^3}$$

$$= \frac{(x^2-4x+4-2x+6)e^x}{(x-2)^3}$$

$$= \frac{(x^2-6x+10)e^x}{(x-2)^3}$$

$$= \frac{[(x-3)^2+1] \cdot e^x}{(x-2)^3} > 0$$

for alle $x \in D_f$

Altså er $f(x)$ konveks i hele sitt definisjonsområde og $x = 3$ gir derfor globalt minimum $f(3) = \frac{e^3}{3-2} = e^3$

$= \underline{\underline{20{,}08}}$