MET 1180, 14. forelesning, 15. nov. 2018, Runar Ile

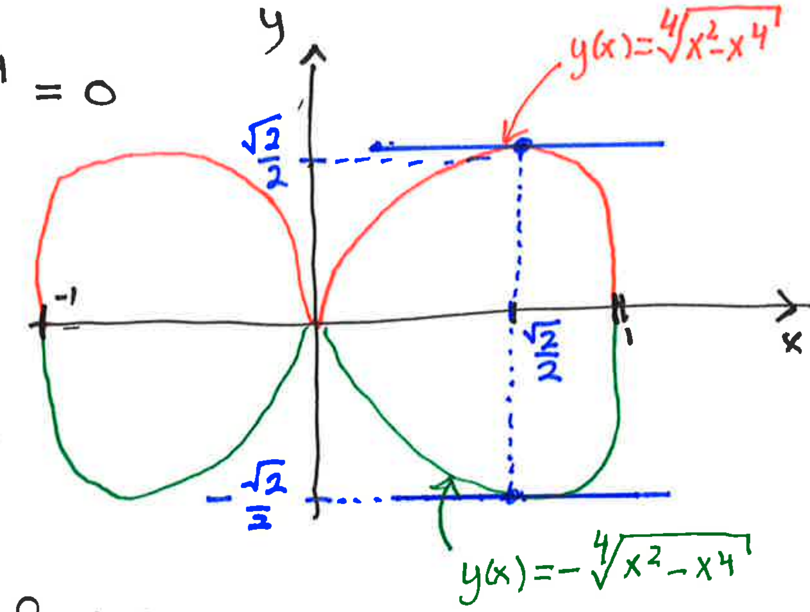
1. Rep. og oppg.
2. l'Hôpitals regel — kap 4.8
3. Grensekostnad, enhetskostnad, grenseinntekt — kap. 4.9
4. Elastisitet — kap 9.9

1. Rep. & oppg.

Implisitt derivasjon: En kurve definert av en likning.

Oppg. 1c $\quad x^4 - x^2 + y^4 = 0$

- ikke grafen til en funksjon!



Vi kan tenke at y er en av disse funksjonene.

Finner $y'(x)$ uttrykt ved hjelp av $y(x)$ og x.

Deriverer på begge sider av likningen:

$$(x^4)'_x - (x^2)'_x + (y^4)'_x = (0)'_x$$

potensregel + kjerneregel

$$4x^3 - 2x + 4y^3 \cdot y'_x = 0$$

Løser likningen m.h.p. y':

$$4y^3 y' = 2x - 4x^3 \quad \text{dvs} \quad y'(x) = \frac{\cancel{2}x(1-2x^2)}{\cancel{4}2y^3}$$

$$y'(x) = \frac{x(1-2x^2)}{2y^3}$$

Finner mulige y-verdier for $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Da er $x^2 = \frac{1}{2}$ og $x^4 = \frac{1}{4}$ og likningen:

$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + y^4 = 0$ dvs $y^4 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

dvs $y^2 = \frac{1}{2}$ dvs $\underline{\underline{y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}}}$

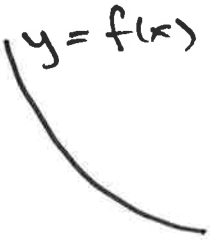
Stigningstallet til de to tangentene:

$$y' = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \overbrace{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}^{2 \cdot \frac{1}{2}}\right)}{2 \cdot \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \underline{\underline{0}}$$

så tangentfunksjonene er konstante

$\underline{\underline{h_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}}}$ og $\underline{\underline{h_2(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}}}$

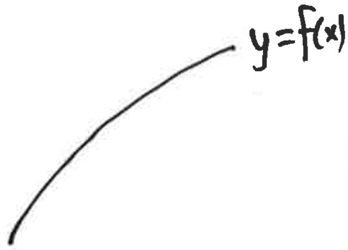
Krumning



Konveks: Grafen krummer oppover

dvs at $f'(x)$ er voksende

dvs at $f''(x) \geq 0$



Konkav: Grafen krummer nedover

dvs at $f'(x)$ er avtagende

dvs at $f''(x) \leq 0$

<u>Oppg 6c</u> $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x + 1$

Skal finne vendepunkter (der $f''(x)$ skifter fortegn) og hvor $f(x)$ er konveks / konkav.

$$f'(x) \overset{\text{kjerner.}}{=} -x\, e^{-\frac{x^2}{2}} + 1 + 0$$

$$f''(x) \overset{\text{prodr.}}{=} (-1) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + (-x)\cdot(-x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= (x^2 - 1)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

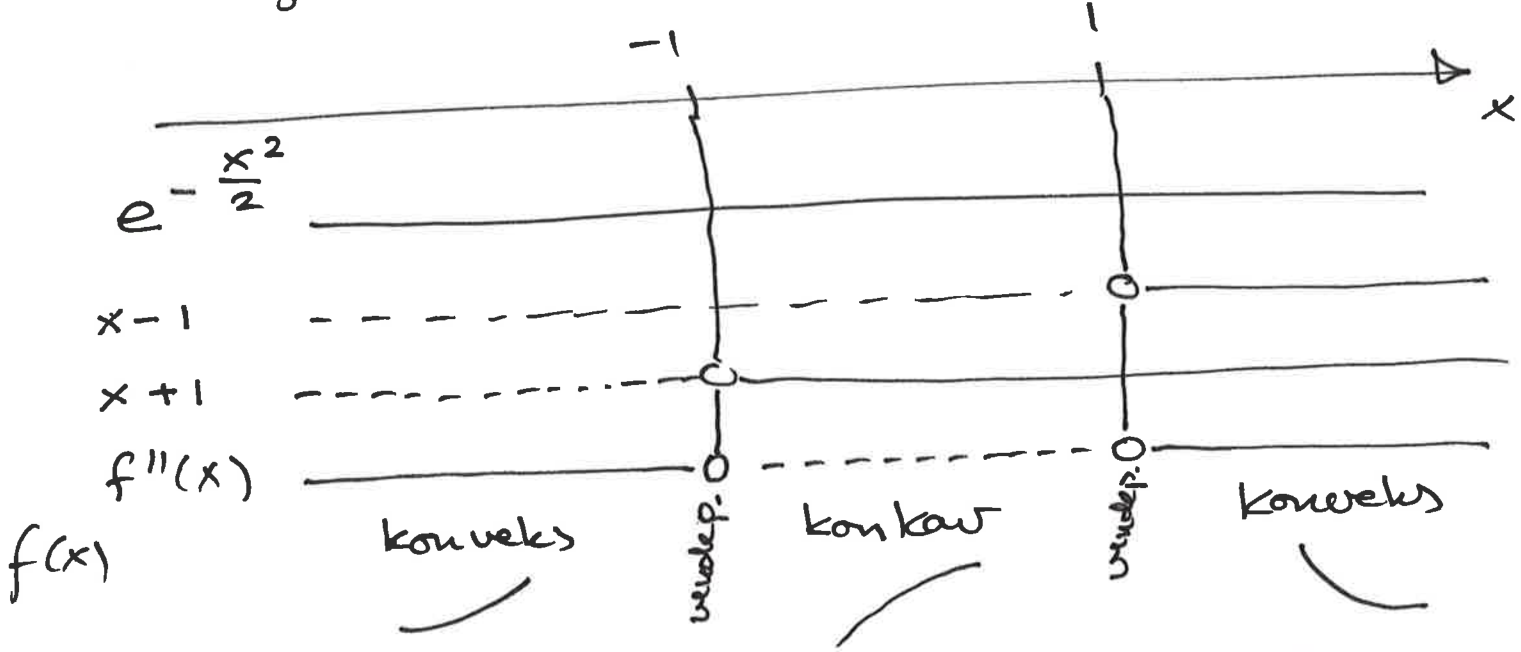
Løser $f''(x) = 0$: $(x^2-1)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$

deler på $e^{-\frac{x^2}{2}}$ på b.s. fordi $e^u > 0$

dvs $x^2 - 1 = 0$ dvs $x^2 = 1$

dvs $x = \pm 1$. og $f''(x) = (x-1)(x+1)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

Fortegnet til $f''(x)$ skifter for $x=-1$ og $x=1$:



så $\underline{\underline{x = -1}}$ og $\underline{\underline{x = 1}}$ er vendepunkter og

$f(x)$ er <u>konveks</u> for x i $\langle -\infty, -1]$ og x i $[1, \infty\rangle$

(3) $f(x)$ er <u>konkav</u> for x i $[-1, 1]$

2. l'Hôpitals regel („loppitals regel")

Grenser av typen $\frac{0}{0}$ og $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Skrivemåte: $\lim_{x \to 5} f(x)$ er det tallet som

$=$ et tall!

$f(x)$ nærmer seg mer og mer når $x \to 5$

„nærmer seg mer og mer"

Eks: $f(x) = \frac{3x-3}{\ln(x)}$. Vil finne $\lim_{x \to 1} f(x)$

$$3x - 3 \xrightarrow[x \to 1]{} 3 \cdot 1 - 3 = 0 \quad \text{og} \quad \ln(x) \xrightarrow[x \to 1]{} \ln(1) = 0$$

så $\frac{0}{0}$ - uttrykk. Da kan vi bruke l'Hôpitals regel:

$$\lim_{x \to 1} f(x) \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(3x-3)'}{(\ln(x))'}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3}{\frac{1}{x}} = \frac{3}{\frac{1}{1}} = \underline{\underline{3}}$$

Deriverer teller og nevner for seg og prøver å finne grensen til den nye brøken.

Men: Må være $\frac{0}{0}$ (eller $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)!

Eks: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 3}{e^{x-9} - 1}$. Finner $\lim\limits_{x \to 9} f(x)$.

$$\lim_{x \to 9} \sqrt{x} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$\lim_{x \to 9} e^{x-9} - 1 = e^{9-9} - 1 = e^{0} - 1 = 1 - 1 = 0$$

så $\frac{0}{0}$-uttrykk. Bruker l'Hôpital:

$$(\sqrt{x} - 3)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{og} \quad (e^{x-9} - 1)' = e^{x-9}$$

$$\lim_{x \to 9} f(x) \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \to 9} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^{x-9}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{9}}}{e^{9-9}} = \frac{\frac{1}{2 \cdot 3}}{1}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

Oppg Bruk l'Hôpitals regel til å finne grensen $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^{x} - 1}$.

Løsning: $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ og $\lim\limits_{x \to 0} e^{x} - 1 = e^{0} - 1 = 0$

så $\frac{0}{0}$. $(x)' = 1$ og $(e^{x} - 1)' = e^{x}$

så $$\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^{x} - 1} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^{x}} = \frac{1}{e^{0}} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

Eks: $$\underset{\frac{\infty}{\infty}}{\lim_{x \to \infty} \frac{x^{2}}{e^{x}}} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^{x}}} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^{x}} = \underline{\underline{0}}$$

3. Grensekostnad, enhetskostnad, grenseinntekt

$K(x)$ kostnaden ved å produsere x enheter

Grensekostnaden (marginalkostnaden) er $K'(x)$.

Tolkning: Hva koster det å produsere én enhet mer enn x enheter?

$$= K(x+1) - K(x) = \frac{K(x+1) - K(x)}{1} \approx \lim_{h \to 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h} = K'(x)$$

Hvorfor? $K'(x)$ er enklere å bruke enn $K(x+1) - K(x)$.

$I(x)$ inntekten ved å selge x enheter

$I'(x)$ grenseinntekten

Eks: x = x antall tonn laks.

$I'(50) \approx$ ekstra inntekt av å selge (produsere) ett tonn mer enn 50.

$\pi(x) = I(x) - K(x)$ profittfunksjonen

$\pi'(x)$ er grenseprofitten.

Enhetskostnaden ved å produserer x enheter er:

$$A(x) = \frac{K(x)}{x}$$

„pris pr. enhet"

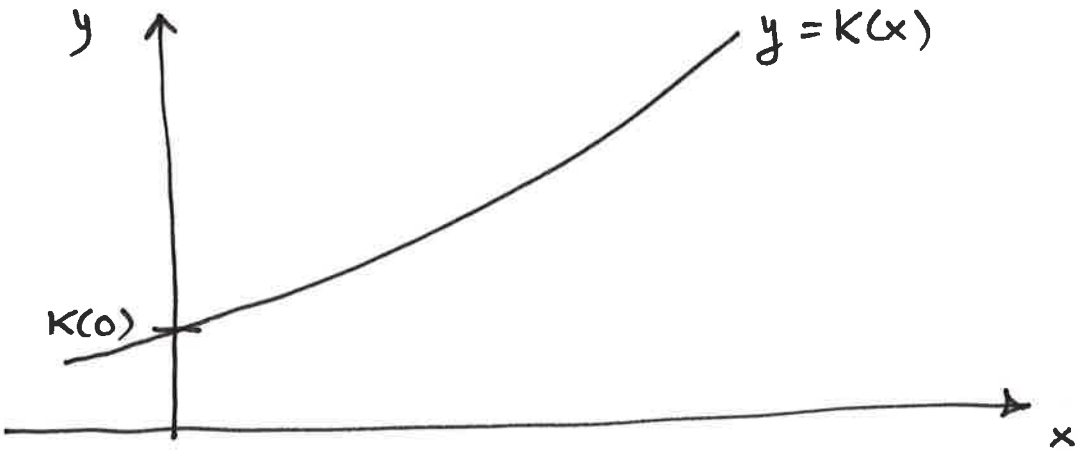
NB: Varierer med hvor mange enheter som produseres.

Definisjon: $K(x)$ er en kostnadsfunksjon $(x \geq 0)$ hvis:

1) $K(0) > 0$ („startkostnader")

2) $K(x)$ voksende $(K'(x) \geq 0)$

3) $K(x)$ konveks $(K''(x) \geq 0)$



Definisjon: Hvis $x = c$ er et minimumspunkt for $A(x)$ kalles c for kostnadsoptimum.

Resultat: Hvis $K''(x) > 0$, så er kostnadsoptimum løsningen på likningen

$$K'(x) = A(x)$$

Begrunnelse: Finner stasjonære punkter for $A(x)$:

$$A'(x) = \left(\frac{K(x)}{x}\right)'$$ med brøkregelen

$$= \frac{K'(x) \cdot x - K(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{K'(x) - A(x)}{x}$$

deler på x i teller og nevner

Så $A'(x) = 0$ tilsvarer $K'(x) - A(x) = 0$

dvs $K'(x) = A(x)$.

Anta $x = c$ løser denne likningen.

Bruker annenderiverttesten ($A''(c) > 0$ medfører c lok. min)

$$A''(x) = \left[\frac{K'(x) - A(x)}{x}\right]'$$

brøkregel

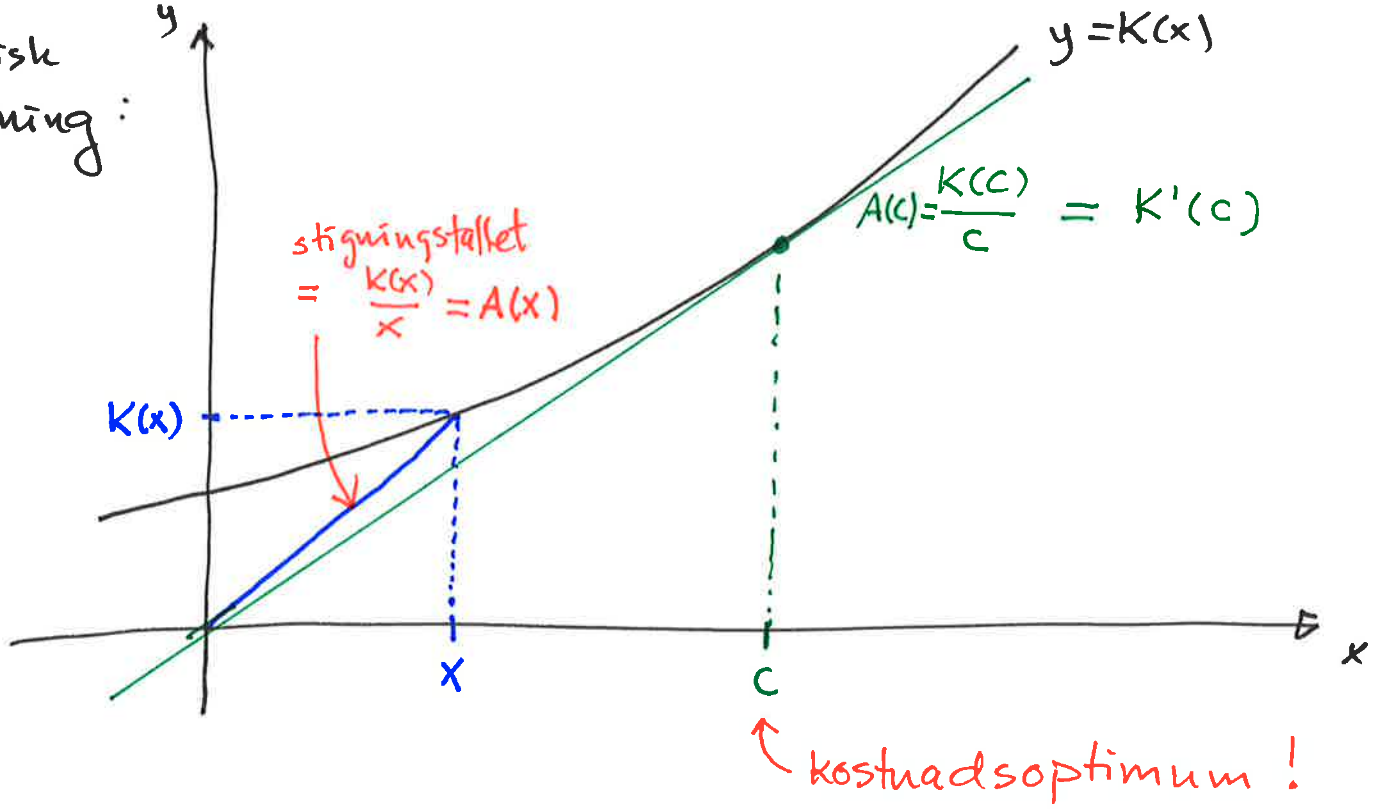
$$= \frac{[K''(x) - A'(x)]\,x - [K'(x) - A(x)]\cdot \overbrace{(x)'}^{1}}{x^2}$$

$$A''(c) = \frac{[K''(c) - \overbrace{A'(c)}^{=0}]\cdot c - \overbrace{[K'(c) - A(c)]}^{=0}}{c^2}$$

$$= \frac{K''(c)\cdot c}{c^2} = \frac{K''(c)}{c} > 0 \text{ (for } c > 0)$$

Så $x = c$ er et lokalt minimumspunkt for $A(x)$.

Grafisk tolkning:



og $A(c) = \frac{K(c)}{c}$ er minimal enhetspris.

Eks: $K(x) = x^2 + 200x + 160.000$

1) $K(0) = 160.000 > 0$

2) $K'(x) = 2x + 200 > 0$ for $x > 0$

3) $K''(x) = 2 > 0$

Så $K(x)$ er en kostnadsfunksjon.

Enhetskostnad $A(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{x^2 + 200x + 160.000}{x}$

$= x + 200 + \frac{160.000}{x}$

Kostnadsoptimum er løsningen på likningen

$K'(x) = A(x)$ dvs $\cancel{2}x + \cancel{200} = \cancel{x} + \cancel{200} + \frac{160.000}{x}$

dvs $x = \frac{160.000}{x}$ dvs $x^2 = 160.000$ dvs $x = \underline{\underline{400}}$

9) Minimal enhetspris $A(400) = K'(400) = 2 \cdot 400 + 200 = \underline{\underline{1000}}$

4. Elastisitet

p = pris , $D(p)$ etterspørsel (= ant. solgte enheter)

$D'(p)$ er marginaletterspørselen

<u>Eks:</u> Ett fat Nordsjøolje koster \$ 66,42

1 liter Nordsjøolje koster 3,55 kr.

Priselastisiteten til etterspørselen er

$$\varepsilon = \frac{\text{Relativ etterspørselsendring}}{\text{Relativ prisendring}}$$

Eks: Prisen synker fra 12 tusen til 10 tusen og etterspørselen øker fra 50 mill\$ til 60 mill\$

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{60-50}{50}\right)}{\left(\frac{10-12}{12}\right)} = \frac{\frac{10}{50}}{\frac{-2}{12}} = \frac{120}{-100}$$

$$= \underline{\underline{-1,2}}$$

Anta prisen endres fra p til $p+h$. Da er relativ prisendring $\frac{p+h-p}{p} = \frac{h}{p}$

og relativ etterspørselsendring:

$$\frac{D(p+h)-D(p)}{D(p)}$$

$$(\varepsilon =) \frac{\left(\frac{D(p+h) - D(p)}{D(p)}\right)}{\left(\frac{h}{p}\right)} = \frac{D(p+h) - D(p)}{h} \cdot \frac{p}{D(p)}$$

$$\downarrow h \to 0$$

Etterspørselens (momentane) priselastisitet $El_p\, D(p) = D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)}$

$$El_p\, D(p) = \varepsilon(p)$$

Tolkningen: Hvis prisen øker med 1 % vil etterspørselen endres med $\varepsilon(p)$ %

Totalt forbruk $E(p) = p \cdot D(p)$

$$E'(p) = D(p) + p \cdot D'(p)$$

$$= D(p)\,[\underbrace{1 + \varepsilon(p)}_{\text{pos/neg ?}}]$$

$\varepsilon(p) > -1$ el. $\varepsilon(p) < -1$

uelastisk elastisk