MET 1180, 15. forelesning, 21. nov. 2018, Runar Ile

1. Rep. og oppg.
2. Lineær approksimasjon
3. Kvadratisk approksimasjon
4. Taylorpolynomer

$\Big\}$ kap. 4.10

1. Repetisjon og oppgaver

l'Hôpitals regel : Brukes på grenser $\frac{0}{0}$ og $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Deriverer teller og nevner for seg.
Ser på grensen til den nye brøken.

Oppg 1h

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}}$$

$\frac{0}{0}$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(\sqrt{x}-1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Kostnadsfunksjoner Tre kriterier

1) $K(0) > 0$
2) $K(x)$ voksende $(K'(x) \geq 0)$
3) $K(x)$ konveks $(K''(x) \geq 0)$

Enhetskostnaden $A(x) = \dfrac{K(x)}{x}$

Kostnadsoptimum : Minimumspunktet til $A(x)$

– er løsningen på likningen $A(x) = K'(x)$
hvis $K''(x) > 0$

Oppg 3d

$$K(x) = 1000 \cdot e^{\overbrace{0{,}0004 \cdot (x+5)^2}^{u = u(x)}} = 1000 \cdot e^u$$

– er en kostnadsfunksjon:

1) $K(0) = 1000 \cdot e^{0{,}01} = 1010{,}05 \underline{> 0}$

$u(0) = 0{,}0004 \cdot 5^2 = 0{,}01$

2) Finner $K'(x)$ ved å bruke kjerneregelen

$u'(x) = 0{,}0004 \cdot 2 \cdot (x+5) \cdot 1 = 0{,}0008\,(x+5)$

$g(u) = 1000 \cdot e^u \quad , \quad g'(u) = 1000 \cdot e^u$

$K'(x) = g'(u) \cdot u'(x) = 1000 \cdot \underline{e^u \cdot 0{,}0008(x+5)}$

$= 0{,}8\,(x+5) \cdot e^u > 0$ for alle $x > -5$

Altså er $\underline{K(x) \text{ voksende}}$ for $x \geq 0$

3) Finner $K''(x)$ ved å bruke produktregelen på $K'(x)$:

$K''(x) = [0{,}8\,(x+5)]' \cdot e^u + 0{,}8(x+5) \cdot (e^u)'_x$

$= 0{,}8 \cdot e^u + 0{,}8\,(x+5) \cdot e^u \cdot 0{,}0008 \cdot (x+5)$

$= 0{,}8 \cdot e^u + 0{,}00064 \cdot (x+5)^2 \cdot e^u$

$= [0{,}8 + 0{,}00064 \cdot (x+5)^2] \cdot e^u > 0$ for alle x

dvs $\underline{K(x) \text{ er konveks}}$

Altså er $K(x)$ en kostnadsfunksjon.

Kostnadsoptimum er løsningen til likningen

$$K'(x) = A(x) = \frac{K(x)}{x} \quad (\text{fordi } K''(x) > 0)$$

dvs $0{,}8(x+5)\cdot e^u = \frac{1000\cdot e^u}{x}$ $\quad | \cdot x > 0$

dvs $0{,}8x(x+5)\,e^u = 1000\,e^u$ $\quad | : e^u > 0$

dvs $0{,}8\,x(x+5) = 1000$ $\quad | : 0{,}8$

dvs $x^2 + 5x = \frac{1000}{0{,}8}$

dvs $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{10\,000}{8} + \frac{25\cdot 2}{4\cdot 2} = \frac{10050}{8}$

$x + \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{10050}{8}}$ (bare interessert i pos. x)

så $x = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{10050}{8}} = \underline{\underline{32{,}94}}$

Minimal enhetspris:

$$A(32{,}94) = \frac{1000\cdot e^{0{,}0004\,(32{,}94+5)^2}}{32{,}94} = \underline{\underline{53{,}99}}$$

Etterspørselens priselastisitet

$$\varepsilon = \frac{\text{Relativ etterspørselsendring}}{\text{Relativ prisendring}}$$

Hvis p = pris og $D(p)$ = etterspørsel (salg)

så er $\varepsilon(p) = \frac{D'(p)\cdot p}{D(p)}$

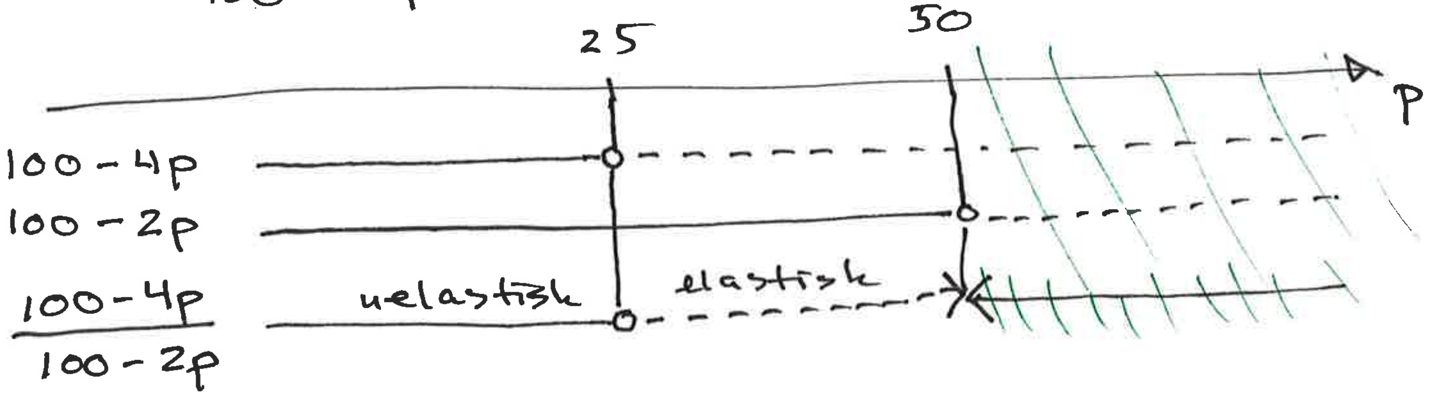
Oppg 7a $\quad D(p) = 100 - 2p \quad (0 < p < 50), \quad D'(p) = -2$

og $\quad \varepsilon(p) = \dfrac{-2p}{100-2p}$

Elastisk: $\varepsilon(p) < -1$ dvs $\dfrac{-2p}{100-2p} < -1$

dvs $\dfrac{-2p}{100-2p} + 1 < 0$ dvs $\dfrac{-2p+100-2p}{100-2p} < 0$

dvs $\dfrac{100-4p}{100-2p} < 0 \quad$ Fortegnsskjema:



Elastisk ~~etterspørsel~~: $25 < p < 50$

Uelastisk —"—: $0 < p < 25$

Nøytralelastisk —"—: $p = 25$

Tolkning: Hvis prisen øker med 1% fra p, endres etterspørselen med $\varepsilon(p)$ %.

F.eks. $\varepsilon(30) = \dfrac{-2\cdot 30}{100-2\cdot 30} = \dfrac{-60}{40} = -1{,}5$ [som i oppg. 6a]

Salgsinntekter: $E(p) = p\cdot D(p)$, $E'(p) = 1\cdot D(p) + p\cdot D'(p)$

$$= \underbrace{D(p)}_{\text{alltid pos.}}\cdot \underbrace{[1+\varepsilon(p)]}_{}$$

$p = 30$

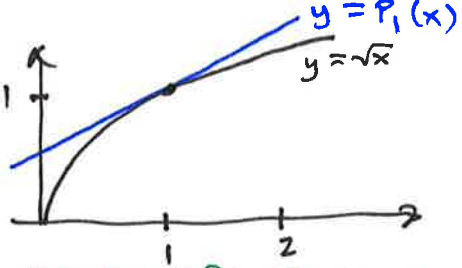
$1 + (-1{,}5)$

$= -0{,}5$

$E(p)$ avtagende hvis $\varepsilon(p) < -1$

$E(p)$ voksende hvis $\varepsilon(p) > -1$

2. Lineær approksimasjon



Eks: $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad (x \geq 0)$

$$P_1(x) = f(1) + f'(1)\cdot(x-1)$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1)$$

tangentfunksjonen fra ettpunktsformelen

$f(1) = \sqrt{1} = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

Kan bruke $P_1(x)$ til å finne en tilnærmet verdi for $\sqrt{1{,}1} = f(1{,}1)$.

$$\approx P_1(1{,}1) = 1 + \tfrac{1}{2}(1{,}1 - 1) = 1{,}05$$

(og $\sqrt{1{,}1} = 1{,}04881\ldots$)

$$\sqrt{2} = f(2) \approx P_1(2) = 1 + \tfrac{1}{2}(2-1) = 1{,}5$$

(og $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$)

$$\boxed{\text{Mønster: } P_1(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)}$$

3. Kvadratisk approksimasjon

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

$f''(1) = -\frac{1}{4\cdot 1\cdot 1} = -\frac{1}{4}$

Eks: $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ (i $x = 1$)

$$P_2(x) = \overbrace{f(1) + f'(1)(x-1)}^{P_1(x)} + \frac{f''(1)}{2}\cdot(x-1)^2$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) + \frac{-\frac{1}{4}}{2}\cdot(x-1)^2$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{8}(x-1)^2$$

Oppg: Beregn $P_2(1)$, $P_2'(1)$ og $P_2''(1)$.

<u>Løsning</u>: $P_2(1) = 1+\frac{1}{2}(1-1) - \frac{1}{8}(1-1)^2 = 1 = \sqrt{1} = f(1)$

$P_2'(x) = (1)' + \frac{1}{2}(x-1)' - \frac{1}{8}\left[(x-1)^2\right]'$

$= 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{8}\cdot 2\cdot(x-1)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1)$

$P_2'(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(1-1) = \frac{1}{2} = f'(1)$

$P_2''(x) = -\frac{1}{4}$ og $P_2''(1) = -\frac{1}{4} = f''(1)$

Så $P_2(x)$ har samme funksjonsverdi som $f(x)$ for $x=1$, samme deriverte som $f(x)$ for $x=1$, samme dobbeltderiverte som $f(x)$ for $x=1$. (samme krumning!)

Da er $P_2(x)$ <u>Taylorpolynomet</u> av grad 2 til $f(x)$ i $x=1$

Mønster: $\boxed{P_2(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2}$

(så $a=1$ i eks.)

$\sqrt{2} = f(2) \approx P_2(2) = 1 + \frac{1}{2}(2-1) - \frac{1}{8}(2-1)^2$

$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{11}{8} = 1{,}375$

$(\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots)$

4. Taylorpolynomer

Eks: $f(x) = \sqrt{x}$ (i $x = 1$)

$$P_1(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$$

$$P_3(x) = \text{———————} \,\text{〃}\, \text{————} + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}}\right)' = \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}-1}$$

$$= \frac{3}{8}\cdot x^{-\frac{5}{2}} \quad \text{og} \quad f'''(1) = \frac{3}{8}\cdot(1)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}$$

$$\text{og} \quad \frac{\frac{3}{8}}{6} = \frac{3}{48}$$

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{3}{48}(x-1)^3$$

Da er $\sqrt{2} = f(2) \approx P_3(2) = 1 + \frac{1}{2}(2-1) - \frac{1}{8}(2-1)^2 + \frac{3}{48}(2-1)^3$

$$= \underbrace{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}} + \frac{3}{48} = \frac{11\cdot 6}{8\cdot 6} + \frac{3}{48} = \frac{69}{48}$$

$$= 1{,}4375$$

Se Eks1.ggb
for grafene til
P1, P2 og P3

$(\sqrt{2} = 1{,}41421)$

Mønster: $\boxed{P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}\cdot(x-a)^3}$

Taylorpolynomet til $f(x)$ av grad n i $x=a$:

$$\boxed{P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}$$

der $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \dots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$

<u>Oppg</u>: Vi har $f(x) = \sqrt{x}$. Finn $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ og $P_4(x)$ for $a = 4$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$$

potensregelen

$$f^{(4)}(x) = \left(\frac{3}{8}\cdot x^{-\frac{5}{2}}\right)' = \frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$$

$$= -\frac{15}{16x^3\sqrt{x}}$$

$$P_1(x) = f(4) + f'(4)(x-4)$$

$$= \underline{2 + \frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4)} = \underline{\underline{2 + \frac{1}{4}(x-4)}}.$$

$$P_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) + \frac{f''(4)}{2}(x-4)^2$$

$$f''(4) = -\frac{1}{4\cdot 4\sqrt{4}} = -\frac{1}{32}$$

$$= \underline{\underline{2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2}}$$

$$f'''(4) = \frac{3}{8 \cdot 4^2 \cdot \sqrt{4}} = \frac{3}{256}$$

$$\underline{\underline{P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3}}$$

$$f''''(4) = -\frac{15}{16 \cdot 4^3 \cdot \sqrt{4}} = -\frac{15}{2048} \text{ og } \frac{\left(-\frac{15}{2048}\right)}{24} = -\frac{5}{16384}$$

$$\underline{\underline{P_4(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{5}{16384}(x-4)^4}}$$

Se Eks2.ggb for grafene til P1, P2, P3 og P4