Plan:

1. Antiderivasjon og ubestemte integraler
2. Integrasjonsregler
3. Substitusjon

MET1181 Høst	MET11804	fagoppgave		
	MET11805	flervalg	20%	
MET1182 Vår	MET11806	fagoppgave	(15/03)	80%
	MET11807	eksamen	(29/05)	

Foreles:	tors	11 – 14	A1-030
Veiledn:	"	14 – 16	D1-080
Kontortid:	"	09 – 11	

veil. + epost

Tema:

- A. Integrasjon (Kap 5)
- B. Matriseregning (Kap 6)
- C. Funksjoner i to variable (Kap 7)

1 Antiderivasjon og ubestemte integral

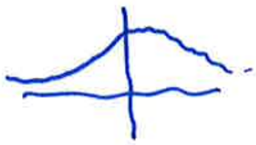
Defn: En antiderivert til en funksjon $f(x)$ er en funksjon $F(x)$ slik at $F'(x) = f(x)$.

Eks: $f(x) = 2x$ har antiderivert $F(x) = \begin{cases} x^2 \\ x^2+1 \\ x^2+3 \\ x^2+C \end{cases}$

Fakta: 1 Hvis $f(x)$ er kontinuerlig på et intervall I, så fins en antiderivert på I.

Ikke alltid lett å finne (eller mulig)

Eks: $f(x) = e^{-x^2}$ „finnes ingen elementær funksjon" med derivert $f(x)$



2 Hvis $f(x)$ har antiderivert $F(x)$ på et intervall I, så er alle antideriverte på formen

$$F(x) + C$$

Ubestemt integral: = den generelle antideriverte (alle antideriverte)

$$\int \underbrace{f(x)}\,\underbrace{dx} = F(x) + C$$

integrasjonstegn

x er integrasjonsvariabelen

uttrykket som skal integreres

integrasjonskonstanten

Eks: $\int 2x\,dx = x^2 + C$

Eks: $\int (1 + x + x^2)\, dx = x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 + C$

Sjekk: $\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C\right)' = 1 + x + x^2$

② Integrasjonsregler:

$(x^n)' = n x^{n-1} \longrightarrow \int n x^{n-1}\, dx = x^n + C$

$\left(\frac{1}{n} \cdot x^n\right)' = x^{n-1} \qquad \int x^{n-1}\, dx = \frac{1}{n} x^n + C$

bytt ut $n \to n+1$

$\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right)' = x^n \longrightarrow \int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

$\parallel$

$\frac{1}{n+1} \cdot (x^{n+1})' = \frac{1}{\cancel{n+1}} \cdot \cancel{(n+1)} \cdot x^n = x^n$

(a) Potensregelen: $\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$

Eks: $\int x^3\, dx = \frac{1}{4} x^4 + C$

$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2}\, dx = \frac{1}{3/2} x^{3/2} + C$

$= \frac{2}{3} x^{3/2} + C = \frac{2}{3} x \cdot \sqrt{x} + C$

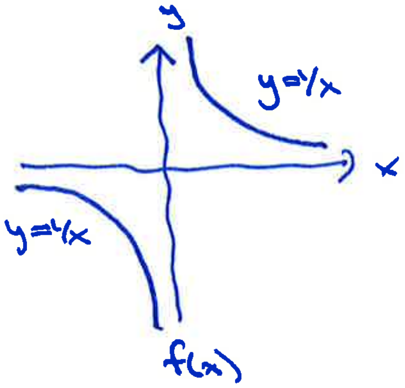
$\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx = \frac{1}{-1} x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}\,dx = \cancel{\frac{1}{-1+1}x^{-1+1} + C}$$

potens-regelen gjelder ikke for $n=-1$

(b) Integrasjon av $\frac{1}{x}$:

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C}$$

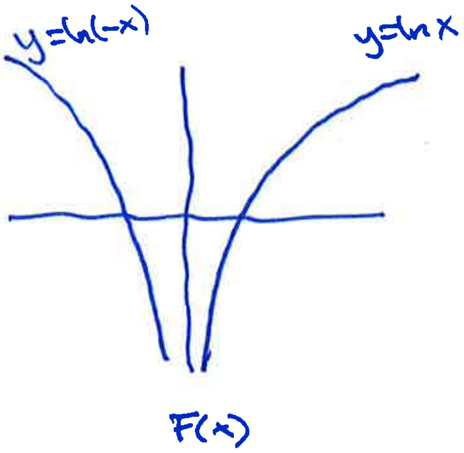


$f(x) = 1/x$

D_f: $x \neq 0$

$D_f = \{x : x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

alle x slik at $x \neq 0$



$x > 0$: $F(x) = \ln(x)$, $x > 0$

$F'(x) = 1/x$

$x < 0$: $F(x) = \ln(-x)$, $x < 0$

$F'(x) = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = 1/x$

$x \neq 0$: $F(x) = \begin{cases} \ln(x), & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$

$= \ln|x|$

c) Integral av sum/differanse: $\int u(x) \pm v(x)\,dx = \int u(x)\,dx \pm \int v(x)\,dx$

d) Integrasjon av konstante koeffisienter: $\int c \cdot u(x)\,dx = c \cdot \int u(x)\,dx$

Eks: $\int 7x^2 - 3x^3 + x^4\,dx = \int 7x^2\,dx - \int 3x^3\,dx + \int x^4\,dx$

$= 7 \cdot \int x^2\,dx - 3\int x^3\,dx + \int x^4\,dx$

$= 7 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 3 \cdot \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + C$

$= \frac{7}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + C$

$7\left(\frac{1}{3}x^3 + C_1\right) - 3\left(\frac{1}{4}x^4 + C_2\right) + \left(\frac{1}{5}x^5 + C_3\right)$

$= \frac{7}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + (7C_1 - 3C_2 + C_3)$

e) Integrasjon av eksponentialfunksjoner:

$\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + C$

(for $a > 0$)

Eks: $\int 100e^x + 3\,dx = 100 \cdot e^x + 3x + C$

Integrasjonsteknikker:

i) Substitusjon (kjerneregel)

ii) Delvis integrasjon (produktregel)

iii) Delbrøksoppspalting (brøkregel)

} neste uke

③ Substitusjon

Eks: $\int e^{2x}dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot e^{2x} + C}}$

kjerne ytre

$\underbrace{x \to 2x \to e^{2x}}_{\text{Sammensatt funksjon}}$

$(e^{2x})' = (e^u)'_x = e^u \cdot u' = e^{2x}\cdot 2$

$u = 2x$
$u' = 2$

Formalisme:

$\int e^{2x}dx = \int e^u \cdot dx = \int e^u \cdot \frac{1}{2}du$

$\boxed{\begin{array}{c} u = 2x \\ du = u'\cdot dx \end{array}}$

$\frac{du}{dx} = u'$

$du = u'\cdot dx$

$u' = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$
$du = 2dx$

$= \int \frac{1}{2}e^u du = \frac{1}{2}\int e^u du$

$= \frac{1}{2}e^u + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{2x} + C}}$

Substitusjon:

$\int f(x)\,dx \xrightarrow{\boxed{\begin{array}{c} u = \dots \\ du = u'\cdot dx \end{array}}} \int g(u)\,du$

Eks:

$$\int x e^{-x^2}\,dx = \int x e^{u}\,dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= -x^2 \\ du &= -2x\cdot dx \end{aligned}}$$

$$dx = \frac{1}{-2x}\cdot du$$

$$= \int \cancel{x} e^{u}\cdot\frac{1}{(-2\cancel{x})}\,du = \int -\frac{1}{2}e^{u}\,du = -\frac{1}{2}e^{u} + C$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

Eks:

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int e^{u}\cdot\frac{1}{(-2x)}\,du$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= -x^2 \\ du &= -2x\,dx \end{aligned}}$$

$$u = -x^2$$
$$x^2 = -u$$
$$x = \pm\sqrt{-u}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{e^{u}}{x}\,du = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{u}}{\pm\sqrt{-u}}\,du$$

Eks:

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx = \int x^{2} e^{u}\frac{1}{(-2\cancel{x})}\,du$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= -x^2 \\ du &= -2x\,dx \end{aligned}}$$

$$x^2 = -u$$

$$= \int \frac{x^2 e^{u}}{-2}\,du = \int \frac{-u e^{u}}{-2}\,du = \frac{1}{2}\int u e^{u}\,du$$

$= \ldots$ (kan løses vha delvis integrasjon).

Eks:

$u = 2x-1$
$du = 2dx$

$$\int (2x-1)^3 dx = \int 8x^3 - 12x^2 + 4x - 1 \, dx$$

$$\| $$

$$\int u^3 \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} u^4 + C$$

$$= \frac{1}{8}(2x-1)^4 + C$$

Eks:

$$\int x \sqrt{x^2+1} \, dx = \int \cancel{x} \cdot \sqrt{u} \frac{1}{2\cancel{x}} du$$

$u = x^2 + 1$
$du = 2x \, dx$

$$= \int \frac{1}{2}\sqrt{u} \, du = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{3} u^{3/2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3} u\sqrt{u} + C = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$$