MET 1180, 2. forelesning, 27. aug 2018, Runar Ile

Plan.
1. Repetisjon
2. Relativ endring og vekstfaktor — kap 1.1
3. Potenser — kap 1.2
4. Renter — kap 1.3
5. Nåverdier av kontantstrømmer — kap 1.4

---

1. Repetisjon

Algebraiske uttrykk: $3ab^2 - 7$, $2x^3 - 11x + 15$

Regnelover: $a(b+c) = ab + ac$ (disti. lov), osv.

Røtter: Kvadratroten $\sqrt{b}$ er bare definert hvis $b \geq 0$ og da er $\sqrt{b}$ tallet $a \geq 0$ slik at $a^2 = b$.

F. eks. $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x & \text{hvis } x < 0 \end{cases} = |x|$

Tredjeroten $\sqrt[3]{b}$ er definert for alle tall b og er tallet a slik at $a^3 = b$

Eks: $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Potenser: $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$

$$\frac{4^3}{2^5} = \frac{4\cdot 4\cdot 4}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{2\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2}}$$

$$= \frac{(2^2)^3}{2^5} = \frac{2^{6}}{2^5} = 2^{6-5} = 2^1 = 2.$$

$6 = 2\cdot 3$

Prioriteringsregler: $2 + 3\cdot 4 = 2 + 12 = 14$

$(2+3)\cdot 4 = 5\cdot 4 = 20$

$3\cdot 2^4 = 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 3\cdot 16 = 48$

$(3\cdot 2)^4 = 6^4 = 1296$

$-3^2 = (-1)\cdot 3^2 = (-1)\cdot 9 = -9$, $(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$

Likninger : En likning er en påstand om at to uttrykk gir samme svar.

Eks 1 : $2x - 1 = 8 - x$

Løsningene på likningen er de verdiene av variablene som gjør påstanden sann.

Eks 1 (forts): $x = 3$ (eneste løsning)

vs : $2 \cdot 3 - 1 = 5$ hs : $8 - 3 = 5$

En likning med to variabler kalles gjerne en likning med to ukjente.

Eks 2 : $xy + 3 = 3y + 2x$

– har flere løsninger, f. eks.

$x = 1, \ y = \frac{1}{2}$ vs : $1 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 3{,}5$

hs : $3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 = 3{,}5$

siden vs = hs er dette en løsning.

$x = 2, \ y = -1$ vs : $2 \cdot (-1) + 3 = 1$

hs : $3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 4$

så vs = hs, ~~og~~ dette er en løsning.

Eks 3 : Likningen $2(x - 7) = 2x + 5$ har ingen løsninger fordi den tilsvarer $2x - 14 = 2x + 5$ som tilsvarer $-14 = 5$ som er en påstand som ikke er sann for noen verdier av x.

2. Relativ endring og vekstfaktor

$$\text{Relativ endring (vekst)} = \frac{\text{ny} - \text{gammel}}{\text{gammel}}$$

$$= \frac{\text{ny} - \text{gammel}}{\text{gammel}} \cdot 100\,\%$$

Husk: $\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$ Eks: $3\,\% = 3 \cdot \frac{1}{100} = \frac{3}{100} = 0{,}03$

Eks: Timelønnen til Kåre har økt fra 163 kr til 181 kr. Da er den relative endringen (veksten) i Kåres timelønn (i prosent)

$$\frac{181 - 163}{163} \cdot 100\% = \frac{18}{163} \cdot 100\,\% = \underline{\underline{11{,}0\,\%}}$$

Timelønnen til Hege har økt fra 213 kr til 233 kr. Den relative veksten i Heges timelønn er

$$\frac{233 - 213}{213} \cdot 100\,\% = \frac{20}{213} \cdot 100\% = \underline{\underline{9{,}4\,\%}}$$

$$\text{Vekstfaktor} = 1 + \text{relativ endring}$$

Eks: Vekstfaktoren til Kåres timelønnsendring er $1 + 0{,}11 = 1{,}11$

Oppg: I fjor tjente Kåre 54.000 (med 163 kr / time) Bruk vekstfaktoren til å skrive opp hva Kåre vil tjene i år hvis han jobber like mye som i fjor, men med timelønn 181 kr/time

Løsning: $54.000 \cdot 1,11 = 59.940$

3. Potenser

$1,11^3 = 1,11 \cdot 1,11 \cdot 1,11$

Negativ eksponent: $1,11^{-3} = \frac{1}{1,11^3}$

$$= \frac{1}{1,11 \cdot 1,11 \cdot 1,11} = \left(\frac{1}{1,11}\right)^3 = \left(1,11^{-1}\right)^3$$

Brøk som eksponent: $1,11^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1,11^2}$

For heltall m, n

og $n > 0$ og alle tall $a \geq 0$: $\quad a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{definisjon}}{=\!=} \sqrt[n]{a^m}$

Eks: $1,11^{1,4142} = 1,11^{\frac{14142}{10000}} = \sqrt[10000]{1,11^{14142}}$

Kalkulator: $1,11$ $\boxed{y^x}$ $1,4142 = 1,15903\boxed{3}$

Oppg: Tast $1,11$ $\boxed{y^x}$ $\underbrace{2\ \boxed{\sqrt{x}}}_{\sqrt{2}}$ $= 1,15903\boxed{5}$

NB: $\sqrt{2} = \boxed{1,4142}14\ldots$

Eks: $$\frac{6^2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6 \cdot 6}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{2}} \cdot \overbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}^{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt{3}} \cdot \overbrace{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}^{3} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}} \cdot \cancel{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}^3 \cdot \sqrt{3}^3}{1 \cdot 1} = 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{6}$$

fordi $(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 2 \cdot 3 = 6$

Samme grunntall : $2^{\boxed{1,5}} \cdot 2^{\boxed{3,8}} = 2^{\boxed{1,5+3,8}}$

må være like

Samme eksponent : $\boxed{2}^4 \cdot \boxed{3}^4 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$

$= 2\cdot3\cdot2\cdot3\cdot2\cdot3\cdot2\cdot3 = (2\cdot3)^4 = \boxed{6}^4$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{1}{2}} = (2\cdot3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$

Mønsteret : $a^r \cdot b^r = (ab)^r$

<u>Oppg</u> Skriv så enkelt som mulig uten å bruke kalkulator :

a) $\dfrac{12^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{6}}$

<u>Løsn</u> :

$= \dfrac{3^{\frac{3}{2}}\cdot4^{\frac{3}{2}}}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3^3}\cdot\sqrt{4^3}}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\cancel{\sqrt{3}}\cdot\cancel{\sqrt{4}}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}}{\cancel{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{3}}} = \dfrac{3\,\boxed{4}}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{3\,\boxed{2\cdot\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}}{\cancel{\sqrt{2}}}$

<u>Alternativ</u> :

$= \dfrac{2^{\frac{3}{2}}\cdot6^{\frac{3}{2}}}{2\cdot6^{\frac{1}{2}}} = 6\sqrt{2}$

$= 2^{\frac{3}{2}-1}\cdot6^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2^{\frac{1}{2}}\cdot6}}$

b) $\dfrac{54^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{2}\cdot6}$

Løsning :

$= \dfrac{\cancel{2^{\frac{1}{3}}}\cdot27^{\frac{1}{3}}}{\cancel{2^{\frac{1}{3}}}\cdot2\cdot3}$ ($27^{\frac{1}{3}} = 3$)

$= \dfrac{\cancel{3}}{2\cdot\cancel{3}} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

NB : $27 = 3\cdot3\cdot3 = 3^3$

Hvordan regner vi 2^{-1} på kalk ?

2 $\boxed{y^x}$ 1 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$ gir 0,5

1.3 Renter   Rentes rente og vekstfaktor.

Eks: Du setter 40.000 på en konto som gir 2,3 % rente pr. år. Rentene kapitaliseres (legges til kapitalen) hvert år (etterskuddsvis), dvs at det er årlig rentetermin.

Etter ett år er balansen (det som står på kontoen) gitt som $40.000 + 40.000 \cdot 2{,}3\%$

$$= 40.000 \cdot 1 + 40.000 \cdot 0{,}023$$

$$= 40.000 \cdot \underbrace{(1 + 0{,}023)}_{\text{vekstfaktoren}} = 40.000 \cdot 1{,}023$$

Du lar pengene stå et år til (med samme bet.)

Da er balansen $40.000 \cdot 1{,}023 \cdot 1{,}023$

$$= 40.000 \cdot 1{,}023^2$$

Hvis pengene blir stående i 5 år

er balansen $40.000 \cdot 1{,}023^5$

$$= \underline{44.816{,}52}$$

Eks: Du setter inn 40.000 med 2,3 % nominell rente, men med kvartalsvis kapitalisering.

Da er terminrenten $= \dfrac{2{,}3\%}{4} = 0{,}575\%$

Vekstfaktoren er $1 + \dfrac{0{,}575}{100} = 1{,}00575$

Oppg Anta innskuddet (og rentene) blir stående med de samme betingelsene i 5 år. Finn et uttrykk for balansen.

Løsning: Antall terminer $4 \cdot 5 = 20$

så: $40.000 \cdot 1{,}00575^{20}$ er balansen etter 5 år

som er $\underline{\underline{44.860{,}15}}$ (det er 43,64 kr mer)

Oppg: Finn den effektive årlige renten i dette eksempelet.

Løsning 1: La r være den effektive renten.

Da har vi $40.000 \cdot (1+r)^5 = 44.860{,}15$

og løser: $(1+r)^5 = \dfrac{44.860{,}15}{40.000}$

$$(1+r) = \left((1+r)^5\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{44.860{,}15}{40.000}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= 1{,}023199$$

så $r = 1{,}023199 - 1 = \underline{\underline{2{,}3199\,\%}}$

Løsning 2: Den årlige vekstfaktoren er $1{,}00575^4 = 1{,}023199$

så: $r = 2{,}3199\,\%$

Mønsteret: Innskudd $= B_0$

nominell (årlig) rente $= r$

antall renteterminer pr år $= n$

og balansen etter m terminer er B.

Da er

$$B = B_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^m$$

f.eks. hvis N=ant. år så er $m = n \cdot N$

Effektiv rente $$r_{eff} = \underbrace{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n}_{\text{vekstfaktoren for ett år}} - 1$$

Nåverdier av kontantstrømmer.

La K_0 være investering / innskudd / betaling i dag. Fremtidsverdien K_n av K_0 om n år (terminer) med rente r er

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n \qquad (*)$$

Omvendt: Anta K_n skal betales om n år med terminrente r. Da er nåverdien K_0 av K_n gitt som (løse likning $(*)$)

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

Eks: 30 mill. utbetalt om 5 år med 8 % årlig rente har nåverdi

$$K_0 = \frac{30 \text{ mill}}{1{,}08^5} = \underline{\underline{20{,}42 \text{ mill}}}$$

Kontantstrømmer

Eks: Du investerer 20 mill i dag, og får utbetalt 6 mill om 3 år, 7 mill om 4 år og 8 mill om 5 år.

Nåverdien av kontantstrømmen

$(-20, 6, 7, 8)$ med årlig rente 8 %.

nå 3 år 4 år 5 år

er gitt som (i mill)

$$-20 + \frac{6}{1{,}08^3} + \frac{7}{1{,}08^4} + \frac{8}{1{,}08^5}$$

$$= -4{,}65$$

Renten som gjør nåverdien av kontantstrømmen til 0 kalles internrenten.

Hjemmelekse: Finn internrenten i eks.

(svar: 1,1197 %)