## Plan:

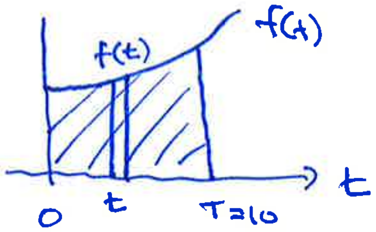
① Løse likningssystemer ved hjelp av eliminasjon

② Lineære likningssystemer

③ Gauss-eliminasjon

## Repetisjon:

a) Kontinuerlige kontantstrømmer




kontantstrøm (kr / tidsenhet)

(kont. diskonteringsrente r)

Total inntekt:

$$\int_0^T f(t)\,dt$$

Nåverdi:

$$\int_0^T f(t)\cdot e^{-rt}\,dt$$

## Oppgaver 20, Oppg. 3:

$f(t) = 300\, e^{t/7}$

$r = 0.10$

$$N = \int_0^{10} 300\, e^{t/7} \cdot e^{-0.10t}\,dt$$

$$= 300 \int_0^{10} e^{t/7 - 0.10t}\,dt$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \frac{1}{7}t - \frac{1}{10}t \\ du = (\frac{1}{7} - \frac{1}{10})\,dt \end{array}}$$

$t=0: \quad u=0$

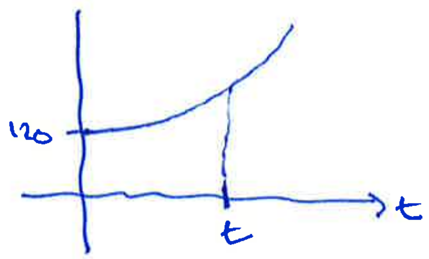
$t=10: \quad u=3/7$

$$= 300 \cdot \int_0^{3/7} e^u \cdot \frac{du}{\left(\frac{10-7}{70}\right)}$$

$$= \frac{300}{3/70} \Big[ e^u \Big]_0^{3/7} = \underline{\underline{7000(e^{3/7}-1)}}$$

Opps. 6.

$V(t) = 120 \cdot e^{\sqrt{t}/5}$




a) Optimalt salgstidspkt.:

$N(t) = V(t) \cdot e^{-rt}$

$= 120\, e^{\sqrt{t}/5} \cdot e^{-0.04t}$

Finn max $N(t)$

b) Likningssystemer og innsettingsmetoden:

Eks: $x^2 + y^2 = 10 \quad (1)$

$x + y = 2 \quad (2) \Rightarrow \underline{y = 2 - x} \quad (2)$

(1) $x^2 + (2-x)^2 = 10$

$x^2 + 4 - 4x + x^2 = 10$

$2x^2 - 4x - 6 = 0$

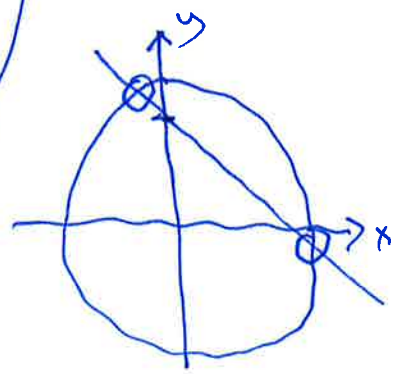
$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$

$\underline{x = 3}$ eller $\underline{x = -1}$

$\underline{y = -1}$ $\quad$ $\underline{y = 3}$

Løsn: $(x,y) = (3,-1),\ (-1,3)$



## 1 Eliminasjonsmetoder:

Eks: 
$$\begin{aligned} (1)\quad & x + y = 4 \\ (2)\quad & x - y = 2 \end{aligned}$$

(1)−(2): $2y = 2$, $\underline{y = 1}$

(1)+(2): $2x = 6 \implies \underline{x = 3}$, $\underline{y = 1}$

Eks:
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \quad (1) \\ x + 2y + 4z &= 7 \quad (2) \\ x + 3y + 9z &= 13 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a)\quad & x + y + z = 3 && (1) \\ (b)\quad & y + 3z = 4 && (2)-(1) \\ (c)\quad & 2y + 8z = 10 && (3)-(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a)\quad & x + y + z = 3 \\ (b)\quad & y + 3z = 4 \\ (c)-2\cdot(b)\quad & 2z = 2 \end{aligned}$$

trappeform

$x + 1 + 1 = 3 \implies \underline{x = 1}$

$y + 3 = 4 \implies \underline{y = 1}$

$\underline{z = 1}$

baklengs substitusjon

Konklusjon: $(x, y, z) = \underline{\underline{(1, 1, 1)}}$

Merk: Metoden over fungerer hvis alle likningene er lineære. Vi skriver ned hele systemet i hvert steg, derfor er det lurt å bruke matriser.

$x+y+z=3$
$x+2y+4z=7$
$x+3y+9z=13$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right) =$$

den utvidede matrisen til det lineære likningssystemet.

② Lineære system = lineære likningssystem

Én lineær likning kan skrives:

to var: $ax+by=c$ (a, b, c gitte tall)
rett linje i (xy-koord. systemet)

tre var: $ax+by+cz=d$ (a, b, c, d gitte tall)
plan i xyz-koordinatsystemet

n var: $a_1 \cdot x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$ ($a_1, a_2, \dots, a_n, b$ er gitte tall)
hyperplan

Lineært system = likningssystem der alle likninger er lineære

$m \times n$ betyr: $\begin{cases} m & \text{likninger} \\ n & \text{ukjente} \end{cases}$

2x2:

3x3:

**Resultat:**

Et $m \times n$ lineært system har enten

i) ingen løsninger
ii) én entydig løsning
iii) uendelig mange løsninger

## ③ Gauss-eliminasjon

En systematisk, rask og generell metode for å løse lineære system.

**Metode:** Vi har et lineært system

① Skriv ned den utvidede matrisen til systemet

② Gjør om matrisen til en trappeform ved å bruke elementære radoperasjoner

③ Skriv ned likningssystemet som trappeformen svarer til, og løs ved baklengs substitusjon.

Eks:

$$x+y+z=4$$
$$x+2y+4z=9$$
$$x-y+z=0$$

Pass på at systemet er skrevet på en systematisk måte.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Big] -1\cdot$$

← den utvidede matrisen til systemet

Ønsker å få null her

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Big] -1$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{array}\right) \Big] 2$$

ønsker null her

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{6} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

trappeform

**Elementær radoperasjon:**

i) Bytte om to rader

ii) Multiplisere en rad med et tall $c \neq 0$.

iii) Legge til $c \cdot$ en rad til en annen rad, når $c$ er et tall.

$$R(i) := R(i) + c \cdot R(j)$$

Eks: $R(2) := \underbrace{R(2) + (-1)\cdot R(1)}_{R(2) - R(1)}$

$R(3) := \underbrace{R(3) + (-1)\cdot R(1)}_{R(3) - R(1)}$

**Trappeform:**

Det første tallet ulik null i en rad kalles en pivot eller ledende koeffisient.

En matrise er på trappeform hvis:

i) Alle null-rader er nederst.

ii) Alle tall under en pivot er null.

**Resultat:**

Alle matriser kan gjøres om til trappeform ved hjelp av elementære radoperasjoner.

Den er ikke entydig. De har alltid ~~[illegible]~~ samme pivot-posisjoner.

Eks (fortsatt)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

trappeform

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ y + 3z &= 5 \\ 6z &= 6 \end{aligned}$$

(3) $6z = 6$ $\quad z = 1$

(2) $y + 3z = 5$

$y + 3 = 5$ $\quad y = 2$

(1) $x + y + z = 4$

$x + 2 + 1 = 4$

$x = 1$

Løsning: $(x, y, z) = (1, 2, 1)$

Baklengs substitusjon:

Start med siste likning, og løs for variabelen som svarer til pivot.

Eks:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x + 2y + 4z &= 9 \\ x \quad - 2z &= 0 \end{aligned} \quad \to \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ y + 3z &= 5 \\ 0 &= 1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ingen løsning

trappeform

**Resultat:** et lineært system har ingen løsninger

$$\Updownarrow$$

det har pivotposisjon i siste kolonne

Eks.:

$$\begin{aligned} x+y+z&=4\\ x+2y+4z&=9\\ x \quad -2z&=-1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 9\\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1 \\ -1 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 1 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

trappeform

$$\begin{aligned} \underline{x}+y+z&=4\\ \underline{y}+3z&=5 \end{aligned}$$

overflødig → ~~0 = 0~~

$z$ er fri variabel (z kan velges fritt)

(2) $y = \underline{5-3z}$

(1) $\underline{x}+y+z=4$

$\underline{x}+(5-3z)+z=4$

$x = \underline{-1+2z}$

Løsning:

$$\begin{aligned} x &= -1+2z\\ y &= 5-3z\\ z &= \text{fri} \end{aligned}$$

$(x,y,z) = \underline{(-1+2z, 5-3z, z)}$ der $z$ er fri

fri variabler = uendelig mange løsninger

$z=0$: $(-1,5,0)$

$z=1$: $(1,2,1)$

$z=2$: $(3,-1,2)$

$\vdots$ $\vdots$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

trappeform

frie variabler: kolonner uten pivot

avhengige variabler: kolonner med pivot

I Eks: frie: $z$
avhengige: $x, y$

Resultat:

Hvis det ikke er pivot i siste kolonne, så er

frie variabler = variabel-kolonner uten pivot

Antall frihetsgrader (= antall frie variabler)

$\boxed{n - \text{antall pivoter}}$

Uendelig mange løsninger = minst én fri variabel

Oppsummering:

Et $m \times n$ lineært system ($m$ likninger, $n$ ukjente) kan alltid løses vha Gauss-eliminasjon. Pivot-posisjonene i en trappeform avgjør antall løsning:

i) pivot i siste kolonne

ingen løsninger

ii) ikke pivot i siste kolonne

$n$ − antall pivotposisjoner = antall frihetsgrader

ingen frihetsgrader ($n$ pivotposisjoner)

én løsning

minst en frihetsgrad ($< n$ pivotposisjoner)

uendelig mange løsninger