MET 1180, 3. forelesning, 30. aug 2018, Runar Ile

Plan:
1. Repetisjon
2. Kontantstrømmer — kap 1.4
3. Rekker — kap 1.5
4. Annuiteter — kap 1.6

## 1. Repetisjon

Relativ endring: $\dfrac{\text{ny} - \text{gammel}}{\text{gammel}}$

Vekstfaktor $= 1 + \text{relativ endring}$

Eks: Verdien av Kåres leilighet vokser med 10 % det første året og faller med 30 % det andre året. Finn den relative verdiendringen for disse to årene.

Løsning: Vi setter $r_1 = 0{,}1$ og $r_2 = -0{,}3$

Vekstfaktor for år 1: $1 + r_1 = 1{,}1$

Vekstfaktor for år 2: $1 + r_2 = 0{,}7$

Vekstfaktor for de årene samlet er da

$$(1+r_1)(1+r_2) = 1{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}77$$

Den relative verdiendringen er $0{,}77 - 1 = -0{,}23$

$= \underline{\underline{-23\,\%}}$

Mønster: Relative endringer $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ gir

$$\overbrace{\underbrace{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot(1+r_3)\cdot\ldots\cdot(1+r_n)}_{\text{samlet vekstfaktor}} - 1}^{\text{samlet relativ endring}}$$

Renteregning: Innskudd ($B_0$) = 50000
rente ($r$) = 4 %. Etter 5 år har
innskuddet vokst til

$$50000 \cdot (1+4\%)^5 = 5000 \cdot 1{,}04^5 = \underline{\underline{60\,832{,}65}}.$$

Kalk: 50000 $\boxed{\times}$ 1,04 $\boxed{y^x}$ 5 $\boxed{=}$

---

Rentebegreper:

Kapitalisering - når renten legges til balansen
Rentetermin: Perioden mellom to kapitaliseringer
Terminrente: Renten pr. rentetermin
Nominell rente: Rente pr. år

---

Eks: Innskudd 50000, nominell rente: 4 %
Månedlig kapitalisering. Etter 5 år har
innskuddet vokst til

$$50000 \cdot \left(1+\frac{4\%}{12}\right)^{12\cdot 5} = 50000 \cdot \left(1+\frac{1}{300}\right)^{60}$$

$$= \underline{\underline{61\,049{,}83}}$$

---

Effektiv rente ($r_{eff}$) = den årlige renten som gir det samme som terminrenten

I eks: $1 + r_{eff} = \left(1+\frac{4\%}{12}\right)^{12} = 1{,}040742$

så $r_{eff} = 4{,}0742\,\%$

---

Potenser $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Eks: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ osv.

$(ab)^r = a^r \cdot b^r$ og $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

Nåverdi av et beløp (K) om n år (eller terminer) med en gitt rente r

= det du må sette i banken i dag ($K_0$) for å få K om n år hvis renten er r.

Fordi $K = K_0 \cdot (1+r)^n$ så er nåverdien $K_0 = \dfrac{K}{(1+r)^n}$

Eks: 50 000 (K) om 3 år med 4% rente har nåverdi

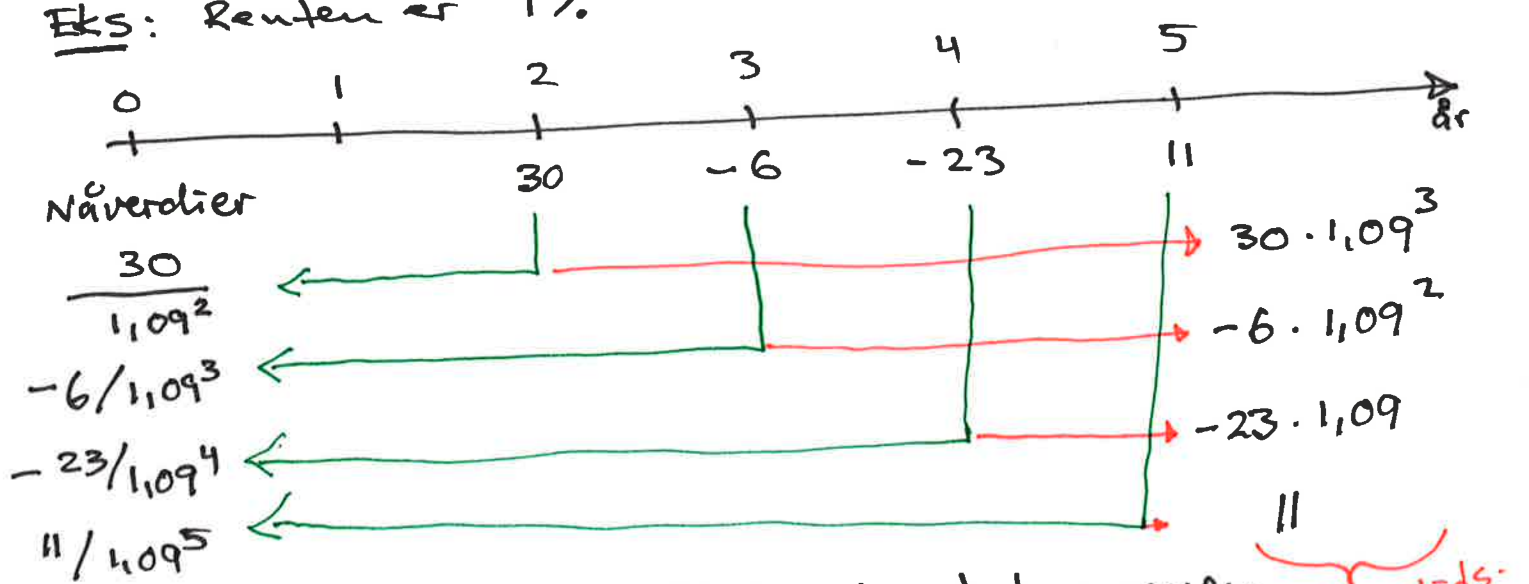
$$K_0 = \frac{50000}{1{,}04^3} = \underline{\underline{44\,449{,}82}}$$

Altså: Hvis du setter inn 44449,82 kr på konto i dag med 4% rente vil beløpet ha vokst til 50000 om 3 år.

2. Kontantstrømmer (forts)

Betalinger (+ og −) fordelt over tid.

Eks: Renten er 9%.




Summen er nåverdien til kontantstrømmen.

$\underbrace{\phantom{xxxx}}$ fremtidsverdien til kontantstrømmen

Nåverdien: $\dfrac{30}{1{,}09^2} - \dfrac{6}{1{,}09^3} - \dfrac{23}{1{,}09^4} + \dfrac{11}{1{,}09^5} = \underline{\underline{11{,}47}}$

Fremtidsverdien: $30 \cdot 1{,}09^3 - 6 \cdot 1{,}09^2 - 23 \cdot 1{,}09 + 11 = \underline{\underline{17{,}65}}$

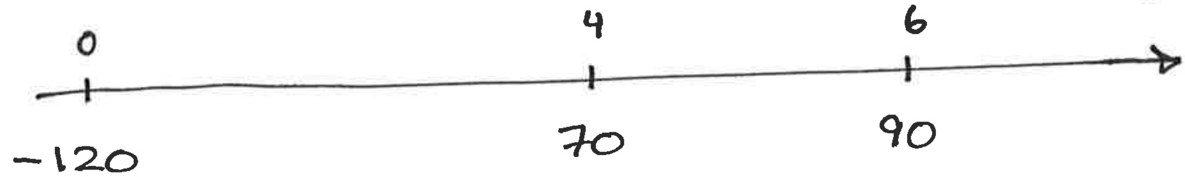
---

Oppg En investering på 120 millioner skal gi utbetalinger på 70 mill om 4 år og 90 mill om 6 år. Anta renten er 12 %.

a) Finn nåverdien til kontantstrømmen.

b) Vurder om dette er en god investering.

Løsning:




a) Nåverdien er (i mill) $-120 + \dfrac{70}{1{,}12^4} + \dfrac{90}{1{,}12^6} = -29{,}92$

b) Man får ikke 12 % rente på denne investeringen.

---

Internrenten til en kontantstrøm er den renten som gir nåverdi 0.

I oppg. er internrenten (tilnærmet) 5,81 %

fordi $-120 + \dfrac{70}{1{,}0581^4} + \dfrac{90}{1{,}0581^6} = 0{,}0$ (tilnærmet)

5,81 % kan tolkes som avkastningen på investeringen.

# 3. Rekker

– lange addisjonsstykker!

Eks: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{100}$ – et ledd i rekken

er en rekke med 10 ledd.

Vi skriver $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

tredje ledd ($a_3$), n-te ledd ($a_n$)

I eks: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{9}$, ..., $a_{10} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$

---

To spesielle typer rekker:

1) **Aritmetisk rekke**

Eks: $7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 + 31$

$a_1 = 7$, $a_2 = 10$, $a_3 = 13$, $a_9 = 31$

Hvert ledd er 3 større enn det forrige leddet

$a_2 - a_1 = 3$, $a_3 - a_2 = 3$, $a_4 - a_3 = 3$,

... $a_9 - a_8 = 3$

Vi finner et uttrykk for summen $S$

$$7 + 10 + 13 + 16 + \dots + 28 + 31 = S$$
$$31 + 28 + 25 + 22 + \dots + 10 + 7 = S$$

$$\underbrace{\underbrace{(7+31)}_{38} + \underbrace{(10+28)}_{38} + \underbrace{(13+25)}_{38} + \underbrace{(16+22)}_{38} + \dots + \underbrace{(28+10)}_{38} + \underbrace{(31+7)}_{38}}_{9 \text{ stk}} = 2S$$

Så $9 \cdot 38 = 2S$ dvs

$$S = \frac{\overset{n}{9} \cdot \overset{(a_1 + a_n)}{38}}{2}$$

---

Oppg (serielån) Hege låner 2,4 mill som hun skal betale tilbake over 30 år, med årlige like store avdrag. I tillegg betaler hun renter for hvert år. Anta renten er 4% i alle disse årene. Beregn hvor mye Hege betaler i renter over disse 30 årene.

Løsning:

| 0 | 1 .... | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2.400' | | 240 | 160 | 80' | 0 |

renter → renter → renter → renter →

$$\underbrace{\underset{a_{30}}{2.400 \cdot 0{,}04} \quad \ldots \quad + \quad 240 \cdot 0{,}04 \quad 160 \cdot 0{,}04 \quad \underset{a_1}{80 \cdot 0{,}04}}$$

alle rentene Hege betaler, som er en aritmetisk rekke som øker med $80 \cdot 0{,}04$ for hvert ledd, eller

$$\text{Renter} = 0{,}04 \cdot (80' + 160' + 240' + \ldots + 2400')$$

$$= 0{,}04 \cdot \frac{(80' + 2400')}{2} \cdot 30 = \underline{\underline{1{,}488 \text{ mill}}}.$$

2) Geometriske rekker $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ der hvert ledd er $k$ ganger det foregående:

$a_2 = k \cdot a_1$ , $a_3 = k \cdot a_2$ , $a_4 = k \cdot a_3$ , osv..

$$a_3 = k \cdot a_2 = k \cdot k \cdot a_1 = k^2 \cdot a_1$$

$$a_4 = k \cdot a_3 = k \cdot k^2 a_1 = k^3 a_1$$

og $a_n = k^{n-1} \cdot a_1$

Vi kan finne et uttrykk for summen

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + \ldots + k^{n-1} \cdot a_1$$

$$= a_1 (\underbrace{1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1}}_{\text{hva er denne summen?}})$$

setter $S = 1 + \cancel{k} + \cancel{k^2} + \cancel{\ldots} + \cancel{k^{n-1}}$

Da er $kS = \cancel{k} + \cancel{k^2} + \cancel{k^3} + \cancel{\ldots} + k^n$

Da er $\underbrace{kS - S}_{(k-1) \cdot S} = k^n - 1$ så $S = \dfrac{k^n - 1}{k - 1} = \dfrac{1 - k^n}{1 - k}$

Summen til den geom. rekken som begynner med $a_1$ og har $k$ som faktor er

$$a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k}$$

__Eks:__ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$

er en geometrisk rekke med

$a_1 = 1$ og $k = \frac{1}{2}$ og $n = 7$

Da er summen $1 \cdot \frac{(\frac{1}{2})^7 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{128} - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{128}}{\frac{1}{2}} \Big| \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{matrix}$

$= \frac{2 - \frac{1}{64}}{1} = 2 - \frac{1}{64} = \frac{2 \cdot 64 - 1}{64} = \underline{\underline{\frac{127}{64}}}$

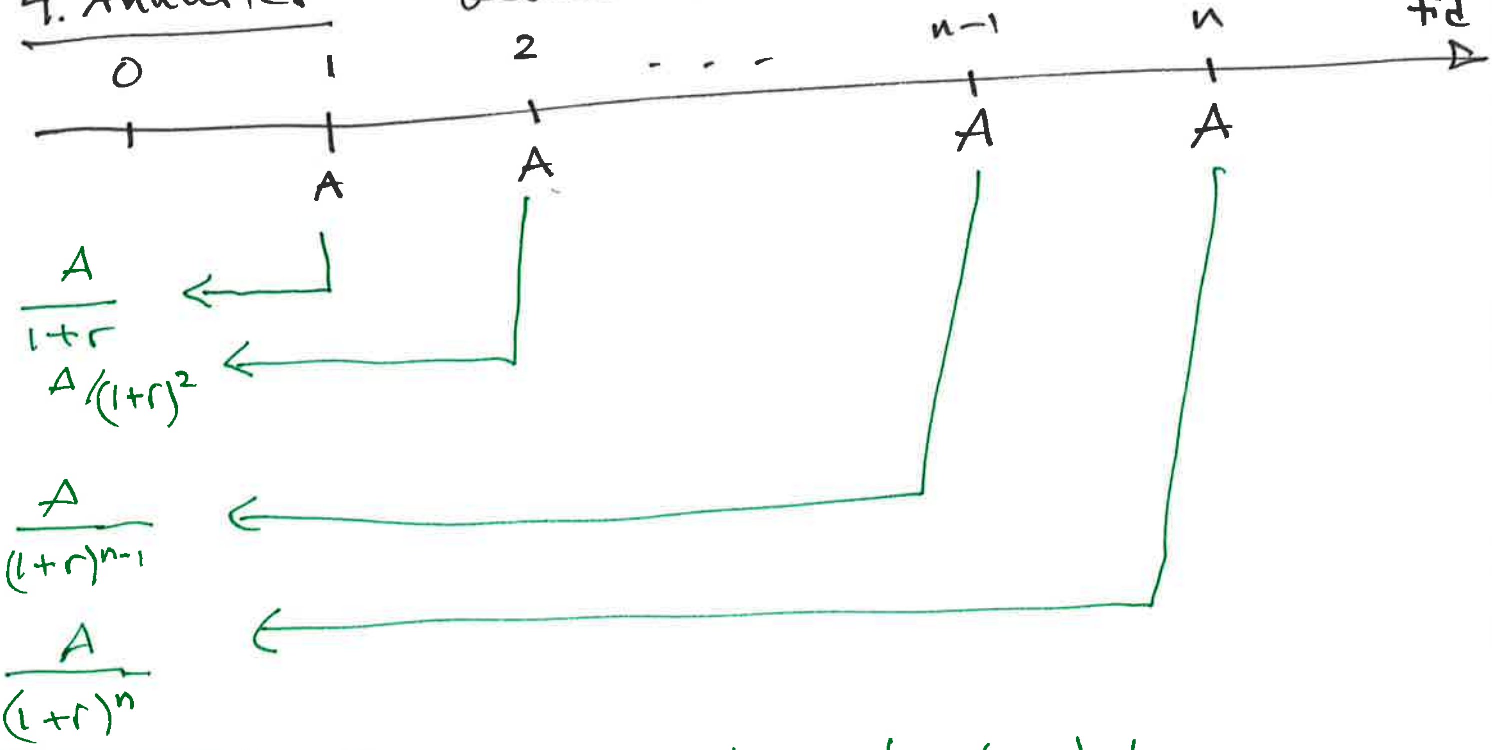
__Oppg:__ Beregn summen

$5 + 5 \cdot 1{,}003 + 5 \cdot 1{,}003^2 + 5 \cdot 1{,}003^3 + \ldots + 5 \cdot 1{,}003^{60}$

Løsn: Dette er en geom. rekke med $n = 61$ og $a_1 = 5$ og $k = 1{,}003$. Da er summen gitt som $5 \cdot \frac{1{,}003^{61} - 1}{0{,}003} = \underline{\underline{334{,}142}}$.

---

__4. Annuiter__ Jevne kontantstrømmer (A = annuiteten)




---

summen er nåverdien av denne kontantstrømmen

Nåverdien av denne jevne kontantstrømmen er en geometrisk rekke

$$\frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A}{(1+r)^{n-1}} + \frac{A}{(1+r)^n}$$

Vi kan lese den baklengs og da får vi

$a_1 = \frac{A}{(1+r)^n}$ , antall ledd $= n$ , $k = 1+r$

slik at summen er $\frac{A}{(1+r)^n} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

$$= A \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r \cdot (1+r)^n}$$