Plan:

1. Tolkning av Lagrange-multiplikatoren λ.
2. Repetisjon Kap 7.

$\boxed{\text{Eksamen } 05/2018}$

Merk:
1) Repetisjonsforelesning: 22/05 kl 11
2) Husk kursevaluering
3) Kontortid: de fleste dager kl 10-18 (ca)
(borte neste uke)

Eks: min $\underset{f(x,y)}{\underset{\shortparallel}{3x+y}}$ når $\underbrace{9x^2y^3=4}$

ikke begrenset

kan eksistere min men det er ikke sikkert

Lagrange:

$$L = 3x+y-\lambda\cdot(9x^2y^3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} L'_x &= 3-\lambda\cdot 9\cdot 2x\cdot y^3 = 0 \\ L'_y &= 1-\lambda\cdot 9x^2\cdot 3y^2 = 0 \\ & 9x^2y^3 = 4 \end{aligned}}$$

Lagrange-betingelsene

Kandidatpkt: vanlige kandidatpkt = løsning av

$$3 = 18\lambda xy^3 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{18xy^3} = \frac{1}{6xy^3} \quad (x,y\neq 0)$$

$$1 = 27\lambda x^2y^2 \qquad \lambda = \frac{1}{27x^2y^2}$$

$$\frac{1}{6xy^3} = \frac{1}{27x^2y^2}$$

$$1\cdot 27x^2y^2 = 1\cdot 6xy^3 \quad | : 3xy^2$$

$$9x = 2y$$

$$y = \frac{9}{2}x$$

$$9x^2y^3 = 4$$

$$9x^2\left(\frac{9}{2}x\right)^3 = 4$$

$$\frac{9x^2\cdot 9^3\cdot x^3}{2^3} = 4$$

$$x^5 = \frac{4\cdot 8}{9^4} = \frac{32}{3^8}$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{32}{3^8}} = \frac{2}{3\cdot\sqrt[5]{27}}$$

$$y = \frac{9}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3\sqrt[5]{27}} = \frac{3}{\sqrt[5]{27}}$$

$$\lambda = \frac{1}{6\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{27}}\left(\frac{3}{\sqrt[5]{27}}\right)^3} = \frac{27^{4/5}}{4\cdot 27} = \frac{1}{4\sqrt[5]{27}}$$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt[5]{27}} \simeq 0.517$

Kandidatpkt: $(x, y; \lambda) = \left(\frac{2}{3}\gamma, 3\gamma; \frac{1}{4}\gamma\right)$

$f = 3 \cdot \frac{2}{3}\gamma + 3\gamma = 5\gamma \simeq \underline{\underline{2.586}}$

Fins pkt med degenerert bibetingelse: Ingen tillatte pkt

$g(x,y) = 9x^2y^3 = 4$

$$\left.\begin{aligned} g'_x &= 18xy^3 = 0 \\ g'_y &= 27x^2y^2 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x=0 \text{ eller} \\ &y=0 \end{aligned}$$

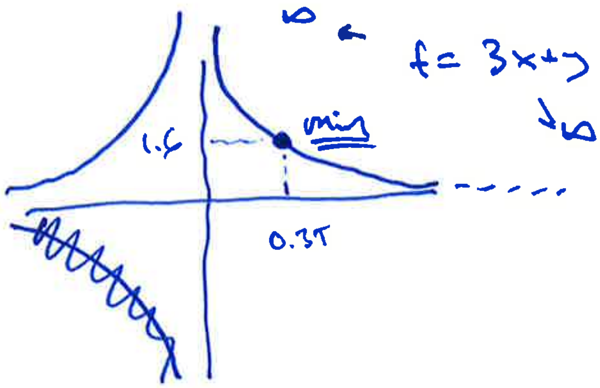
tilfredsstiller ikke bibetingelsen

Kandidatpkt er lokalt min:

$9x^2y^3 = 4$

$y^3 = \frac{4}{9x^2}$

$y = \sqrt[3]{\frac{4}{9x^2}}$



$9x^2y^3 = 4$

Lagrange-multiplikatoren:

$(x,y) = \left(\frac{2}{3}\gamma, 3\gamma\right) = (0.345, 1.552)$

$f(x,y) = 2.586$

$\lambda = \underline{0.129}$
$\gamma/4$

Eivind Eriksen, Kontor B4-032, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/

min $f(x,y)=3x+y$ når $\underbrace{9x^2y^3}_{g(x,y)}=\underbrace{4}_{a}$

Hva skjer om vi endrer a?

Vi får et nytt minimumspkt: $(x^*(a), y^*(a))$

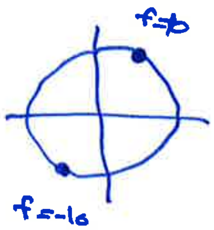
— " — minimumsverdi: $f(x^*(a), y^*(a)) = f^*(a)$

maksimumsverdi-funksjonen

Tolkning av λ: $\boxed{\lambda = \frac{df^*(a)}{da}}$

endring i maks/min-verdi per enhet endring i a

Eks: max $f(x,y)=x+3y$ når $\underbrace{x^2+y^2=10}_{\text{begrenset}}$ (a)



$L = x+3y-\lambda(x^2+y^2)$

$L'_x = 1-\lambda\cdot 2x = 0 \qquad \lambda = \frac{1}{2x}$

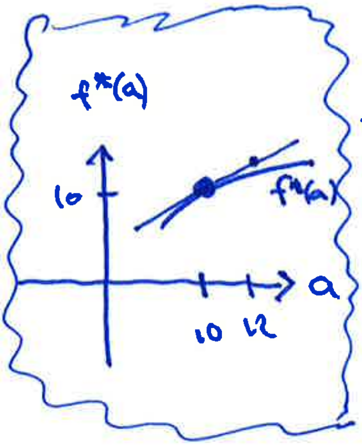
$L'_y = 3-\lambda\cdot 2y = 0 \qquad \lambda = 3/2y$

$x^2+y^2=10$

$\frac{1}{2x} = \frac{3}{2y}$

$2y = 6x$

$y = 3x$



$x^2+(3x)^2=10$

$x^2+9x^2=10$

$10x^2=10$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

$x=1,\ y=3,\ \lambda=1/2$

$x=-1,\ y=-3,\ \lambda=-1/2$

Kand: $(1,3;\ 1/2)$ $f=10$ $\Rightarrow$ $f_{max}=10$ i $(1,3)$ med $\lambda = 1/2$

$(-1,-3;\ -1/2)$ $f=-10$

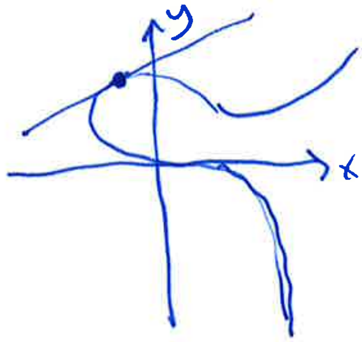
$a=10$: $x^*(10)=1$ $y^*(10)=3$ $f^*(10)=10$

$a=12$: $f^*(12) \cong \underbrace{f^*(10)}_{10} + \underbrace{\Delta a}_{12-10=2} \cdot \underbrace{\frac{df^*(a)}{da}}_{\lambda=1/2} = 10 + 2\cdot 1/2 = 11$

(2) Repetisjon: Kap 7 Funksjoner i to variable

(a) Derivasjon av en funksjon i to variable = partiellderivasjon.

(b) Nivåkurver: $f(x,y) = c$
(for en konstant c)



1) Tangenten i et punkt:

Hvis (x_0, y_0) er et pkt på nivåkurven $f(x,y) = c$, dvs $f(x_0, y_0) = c$, så er tangenten gitt

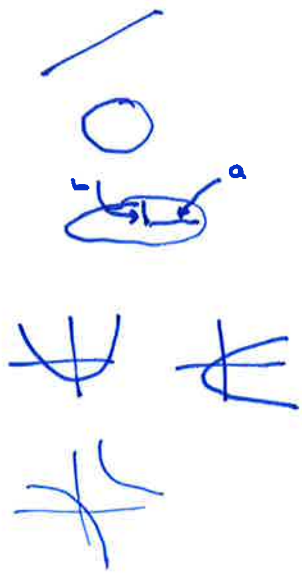
$$\boxed{y - y_0 = a \cdot (x - x_0)}$$

der $a = -\dfrac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}$

2) Noen viktige typer:

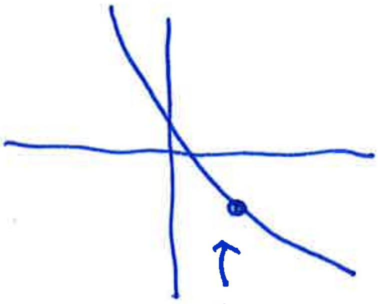
- rette linjer: $ax + by = c$
- sirkel: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$
- ellipse: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
- parabel: $y = a \cdot (x-x_0)^2 + b$

  $x = a(y-y_0)^2 + b$
- hyperbel: $y - y_0 = \dfrac{a}{x - x_0}$



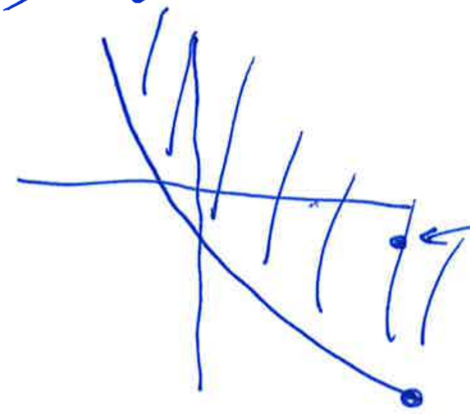
b) Topologi: Mengden av tillatte pkt.

i) $g(x,y) = a$:



ii) $g(x,y) \geq a$

$g(x,y) \leq a$



iii) Er mengden begrenset?

Skisse av området

eller

prøve å finne konstanter a,b,c,d slik at

$$a \leq x \leq b$$
$$c \leq y \leq d$$

for alle (x,y) i mengden

Eks:

$$x^4 + y^4 = 10$$

$$-\sqrt[4]{10} \leq x \leq \sqrt[4]{10}$$

$$\text{"} \quad y \quad \text{"}$$

Ekstremverdisetningen: Hvis f er kont. på en lukket og begrenset mengde, har den maks og min.

c) Maks/min-problemer = Optimeringsproblemer

Hvis (x,y) er maks/min, så er det enten

i) stasjonært punkt

ii) et annet kritisk pkt (f'_x eller f'_y ikke fins)

iii) randpkt

max/min $f(x,y)$

Stasjonære pkt:

$f'_x = f'_y = 0$

Sjekk: – andre kritiske pkt
– randpkt

Klassifisere stasjonære pkt:

$H(f)(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

$AC - B^2 > 0$, $A > 0$: lokalt min

$AC - B^2 > 0$, $A < 0$: " max

$AC - B^2 < 0$: sadelpkt

Globale maks/min:

- bruk klassifisering
- regn ut f i hvert pkt.

max/min $f(x,y)$ når $g(x,y) = a$

Lagrange: i) $\mathcal{L} = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$

$\boxed{\begin{matrix} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \\ g(x,y) = a \end{matrix}}$ Lagrange-betingelsene

Løsninger av = kandidatpkt.

ii) Sjekk: tillatte pkt med degenerert bibet.

$\boxed{\begin{matrix} g'_x = g'_y = 0 \\ g(x,y) = a \end{matrix}}$

iii) Globale maks/min

- regn ut f i hvert pkt
- ekstremverdisetningen

Substitusjon:

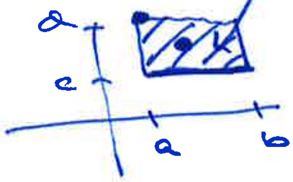
max xy når $x + y = 1$
$y = 1 - x$

max $x \cdot (1 - x)$
$= x - x^2$

$g(x,y) = a$ ← bibet.
løs for y og sett inn i $f(x,y)$

⇓

maks/min-problem til funksjon i én variabel uten bibetingelse max/min $f(x,y)$ når $\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$



Kandidatpkt:

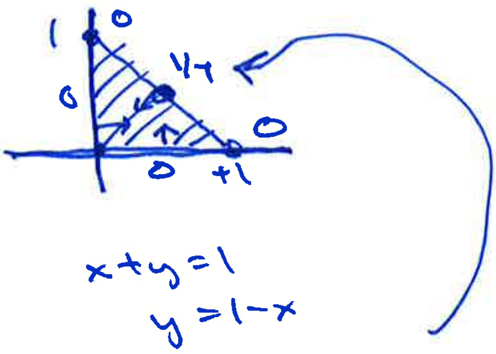
i) Indre pkt: $f'_x = f'_y = 0$
sjekk at de er indre pkt

ii) randpkt:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{a)}\ y=c: & f(x,c) & a \le x \le b \\ \text{b)}\ y=d: & f(x,d) & \text{"} \\ \text{c)}\ x=a: & f(a,y) & c \le y \le d \\ \text{d)}\ x=b: & f(b,y) & \text{"} \end{array}\right\}$$

analyser hva som skjer i hvert tilfelle

Eks:
max/min xy når $\underbrace{x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 1}$



Indre: $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x=0 \end{array}\right\}$ $\cancel{(0,0)}$ ingen.

Rand: $x=0$: $f=0$

$y=0$: $f=0$

$y=1-x$: $f = x\cdot(1-x)$
$= x - x^2$, $0 \le x \le 1$

$f(0)=0 \quad f(1)=0$

$f' = 1-2x = 0$
$x = 1/2 \quad f(1/2, 1/2) = \underline{1/4}$

$x+y=1$
$y = 1-x$

$f_{max} = \underline{\underline{1/4}}$

$f_{min} = \underline{\underline{0}}$