MET 1180, 4. forelesning, 6. sept. 2018, Runar Ile

Plan
1. Repetisjon
2. Uendelige rekker og grenseverdier — kap 1.7
3. Eulers tall og kontinuerlig forrentning — kap 1.8

1. Repetisjon

De tre sentrale begrepene i finansmatematikken:
Vekstfaktor   Nåverdi   Kontantstrøm

Renteformelen: $K_n = K_0 \overbrace{\underbrace{(1+r)}_{\text{vekstfaktor for 1 termin}}{}^n}^{\text{vekstfaktor for } n \text{ terminer}}$

K_0 = innskudd
K_n = balanse etter n terminer
r = terminrente

Eks: 100 kr innskudd, 4,8 % nominell rente, kvartalsvise terminer

Saldo etter 5 år: $K_{20} = 100 \cdot \left(1 + \frac{4{,}8\%}{4}\right)^{20}$

$= 100 \cdot 1{,}012^{20} = \underline{\underline{126{,}94}}$.

Effektiv rente = relativ endring på ett år

I eks. er årlig vekstfaktor $1{,}012^4 = 1{,}0489$
som gir effektiv rente $r_{eff} = 4{,}89\%$

Nåverdi av en betaling K_n om n terminer med rente r er innskuddet K_0 som gir K etter n terminer:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

Kontantstrøm : Betalinger fordelt på tidspunkter.

Eks:

tid	0	1	2	3	4
	-20	-20	0	0	70

Nåverdiene til en kontantstrøm : Summen av nåverdiene til alle betalinger i kontantstrømmen.

I eks: Hvis (diskonterings)renten er 10 %

er nåverdien $-20 - \frac{20}{1,1} + \frac{70}{1,1^4} = \underline{\underline{9,63}}$

Internrenten til en kontantstrøm er terminrenten r som gir nåverdi 0.

Det er renten som gjør „kontrakten" rettferdig.

Det er typisk vanskelig å løse likningen for internrenten eksakt.

I eks. er internrenten omtrent 17,23 % fordi

$$-20 - \frac{20}{1,1723} + \frac{70}{1,1723^4} = 0,00273\ldots \approx 0,00$$

Fremtidsverdien til kontantstrømmen er summen av fremtidsverdiene til betalingene.

I eks er fremtidsverdien etter 4 år (sluttverdien)

$$-20 \cdot 1,1^4 - 20 \cdot 1,1^3 + 70 = \underline{\underline{14,10}}$$

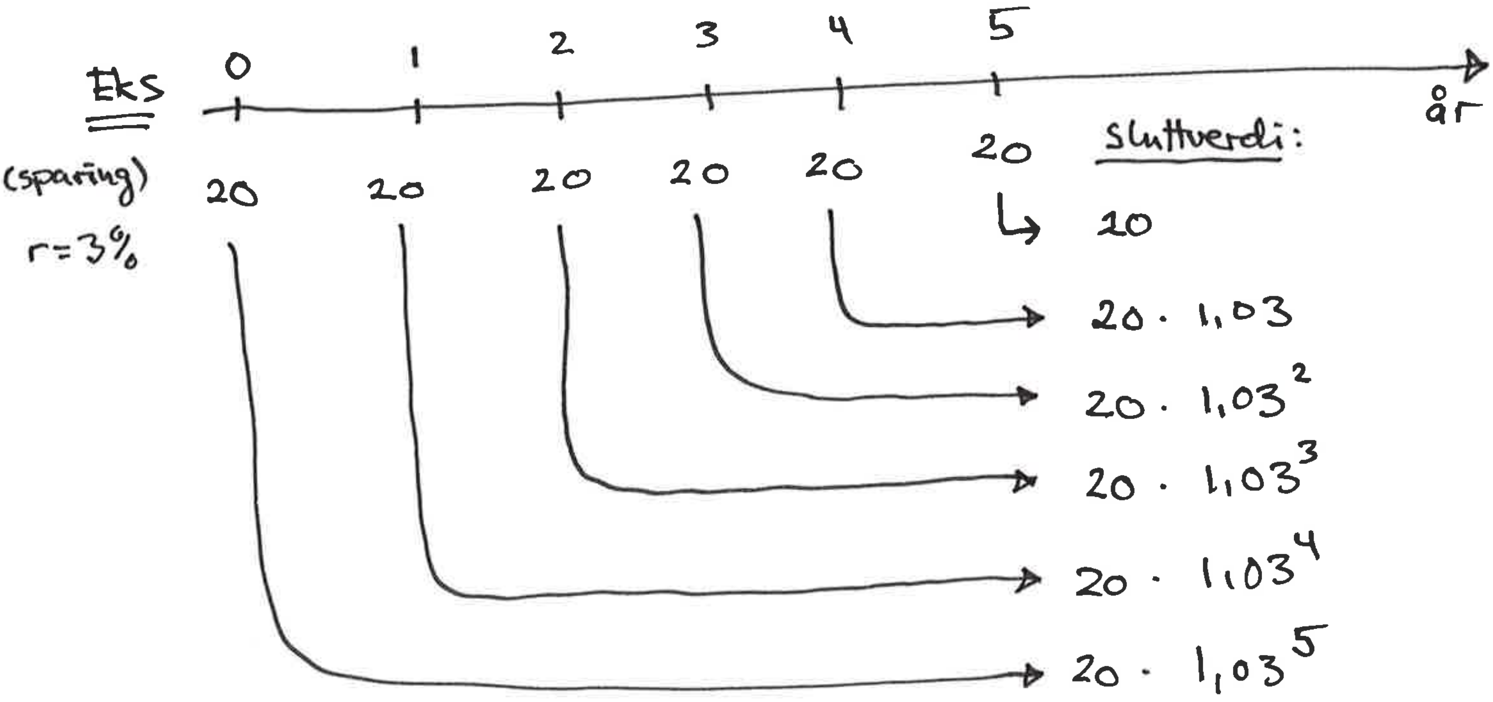
NB: $9,63 \cdot 1,1^4 = 14,10$

Regulær kontantstrøm: Samme beløp betales hver termin.

Typisk eks. er annuitetslån. Da er nåverdien av kontantstrømmen lik lånebeløpet.

Et annet eks. er sparing med fast beløp hver termin. Da er sluttverdien det du har spart opp inkludert renter.

Nåverdien og sluttverdien til regulære kontantstrømmer er geometriske rekker.



Balansen etter 5 år:

$$\underbrace{20}_{=a_1} \xrightarrow{\cdot 1{,}03} + 20 \cdot \underbrace{\boxed{1{,}03}}_{=k} \xrightarrow{\cdot 1{,}03} + 20 \cdot 1{,}03^2 \xrightarrow{\cdot 1{,}03} + 20 \cdot 1{,}03^3 \xrightarrow{\cdot 1{,}03} + 20 \cdot 1{,}03^4 \xrightarrow{\cdot 1{,}03} + 20 \cdot 1{,}03^5$$

n = antall ledd i summen =

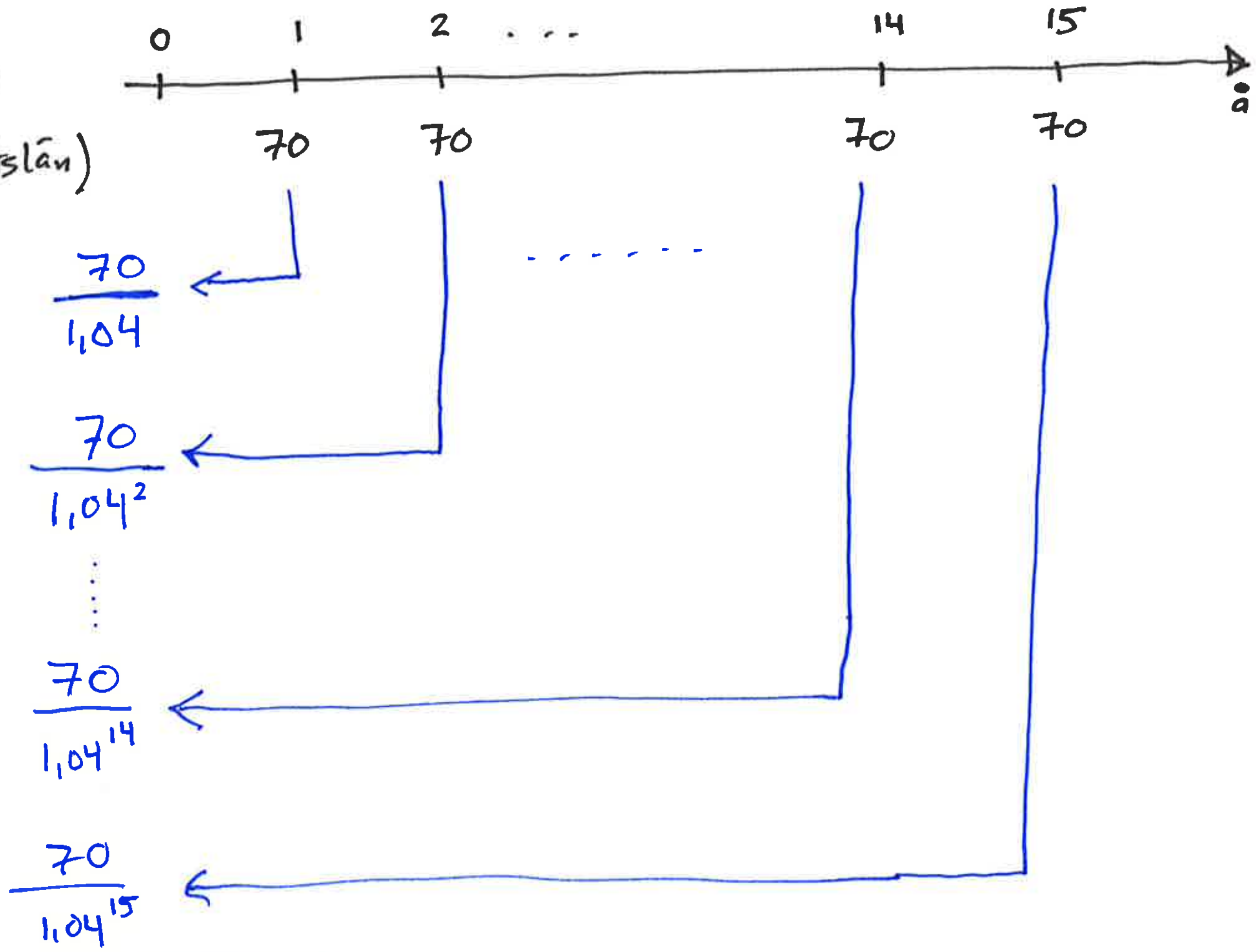
$$= 20 \cdot \frac{1{,}03^6 - 1}{1{,}03 - 1} = 20 \cdot \frac{1{,}03^6 - 1}{0{,}03} = \underline{\underline{129{,}368}}$$

Mønster: $a_1 \cdot \dfrac{k^n - 1}{k - 1}$, k = vekstfaktor, n = ant. ledd

Eks:

(annuitetslån)

4 %



Summen er nåverdien til kontantstrømmen (= lånebeløp)

$$\text{Geom. rekke: } \frac{70}{1{,}04} \xleftarrow{\cdot 1{,}04} + \frac{70}{1{,}04^2} \xleftarrow{\cdot 1{,}04} + \dots \xleftarrow{\cdot 1{,}04} + \frac{70}{1{,}04^{14}} \xleftarrow{\cdot 1{,}04} + \underbrace{\frac{70}{1{,}04^{15}}}_{= a_1}$$

Vi leser rekken baklengs :

$$a_1 = \frac{70}{1{,}04^{15}}$$

$$k = 1{,}04$$

$$n = 15$$

Nåverdien (lånebeløp) :

$$\frac{70}{1{,}04^{15}} \cdot \frac{1{,}04^{15} - 1}{0{,}04}$$

$$= \underline{\underline{778{,}29}}$$

2. Uendelige rekker og grenseverdier

Eks: Annuiteten 70000 pr. år med 4 % rente i n år gir nåverdi

$$\frac{70\,000}{1{,}04^n}\cdot\frac{1{,}04^n-1}{0{,}04} = 70\,000\cdot\frac{1-\frac{1}{1{,}04^n}}{0{,}04}$$

$$\Big\downarrow\; n\to\infty$$

Når n vokser vokser også $1{,}04^n$

Hvis $n\to\infty$

så $1{,}04^n\to\infty$

og $\frac{1}{1{,}04^n}\to 0$

$$70.000\cdot\frac{1-0}{0{,}04}$$

$$=\frac{70000}{0{,}04}$$

$$= 1{,}75 \text{ millioner}$$

Konkl: Hvis du betaler 70.000 hvert år med 4 % rente for all fremtid så kan du låne 1,75 mill.

Vi kunne også regnet forlengs:

$$\frac{70000}{1{,}04}+\frac{70000}{1{,}04^2}+\dots+\frac{70000}{1{,}04^n} \qquad k=\frac{1}{1{,}04}$$

$a_1 =$ $\frac{70000}{1{,}04}$

$$=\frac{70000}{1{,}04}\cdot\frac{\frac{1}{1{,}04^n}-1}{\frac{1}{1{,}04}-1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{70000}{1{,}04}\cdot\frac{-1}{\frac{1}{1{,}04}-1}$$

$\frac{1}{1{,}04^n}\to 0$

$$= \frac{70000}{1{,}04} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{1{,}04}\right)} = \frac{70\,000}{1{,}04 - 1}$$

$$= \frac{70\,000}{0{,}04}$$

Mønster: $a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \ldots + a_1 k^n = \frac{a_1}{1-k}$

3. Eulers tall og kontinuerlig forrentning

Eks: Du setter inn 1000kr på konto med 12% nominell rente. i ett år.

Kapitalisering	Saldo
Årlig	$1000 \cdot 1{,}12 = 1120{,}00$
Halvårlig	$1000 \cdot 1{,}06^2 = 1123{,}60$
Kvartalsvis	$1000 \cdot 1{,}03^4 = 1125{,}51$
Månedsvis	$1000 \cdot 1{,}01^{12} = 1126{,}83$
Daglig	$1000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{365}\right)^{365} = 1127{,}49$
Mønster: n terminer/år	$1000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{n}\right)^n$

meget pussig!

Eulers tall : $e = 2{,}71828\ldots$

Regner $1000 \cdot e^{0{,}12} = 1127{,}50$

taster: 1000 $\boxed{\times}$ 0,12 $\boxed{e^x}$ $\boxed{=}$

ekstra: Beregn $1000 \cdot e^{-0{,}12} = 886{,}92$

$= \frac{1000}{e^{0{,}12}}$

Eulers tall er definert som grensen til $(1 + \frac{1}{n})^n$ når n blir stor $(n \to \infty)$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e$$

Eks: $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}71692\ldots$

$$\left(1 + \frac{1}{1\text{ mill}}\right)^{1\text{ mill}} = 2{,}71828\ldots \approx e$$

[boka: $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$]

Eks (forts) $\left(1 + \frac{0{,}12}{n}\right)^n$ (n terminer pr år, 12% nominell rente)

$$= \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{n}{0{,}12}\right)}\right)^n = \Bigg[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{n}{0{,}12}\right)}\right)^{\frac{n}{0{,}12}}}_{\text{nærmer seg } e \text{ når } n \to \infty}\Bigg]^{0{,}12}$$

så $\left(1 + \frac{0{,}12}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{0{,}12}$

Etter 1 år med 12% nominell rente og kontinuerlig forrentning har innskuddet 1000 kr vokst til $1000 \cdot e^{0{,}12}$ kr $= \underline{\underline{1127{,}50 \text{ kr}}}$.

Dvs: Den årlige vekstfaktoren er $e^{0{,}12}$

$= \underline{\underline{1{,}127497}}$

Etter 2 år med 12% nominell rente og kontinuerlig forrentning har innskuddet vokst til

$$1000 \cdot e^{0,12} \cdot e^{0,12} = 1000 \cdot (e^{0,12})^2$$
$$= 1000 \cdot e^{0,12 \cdot 2}$$
$$= 1000 \cdot e^{0,24}$$
$$= \underline{\underline{1271,25}}$$

<u>Oppg</u>: Du setter inn 10 mill på konto nominell rente: 2,8%. Beregn saldo etter 5 år med:

a) årlig forrentning

b) kontinuerlig —"—

c) Beregn den effektive renten når det er kont. forrentning.

Svar: a) 11,20 mill

b) 11,50 mill

c) 2,84 %