Plan:
1. Repetisjon
2. Lineære og kvadratiske likninger
3. Likninger med parametre
4. Polynomlikninger

## 1. Repetisjon

Finansmatematikk $\begin{cases} \text{Vekstfaktor} \\ \text{Nåverdi} \\ \text{Kontantstrøm} \end{cases}$

Uendelige geometriske rekker

$$\underbrace{1 + \frac{1}{1{,}03} + \frac{1}{1{,}03^2} + \dots + \frac{1}{1{,}03^n}}_{\text{endelig geom. rekke}} + \dots$$

$\cdot 1{,}03$ $\cdot 1{,}03$ $\cdot 1{,}03$

begge veier

Enten: $a_1 = \frac{1}{1{,}03^n}$, $k = 1{,}03$, antall ledd $= n+1$

$$\frac{1}{1{,}03^n} \cdot \frac{1{,}03^{n+1} - 1}{0{,}03} = \frac{\frac{1}{1{,}03^n} \cdot 1{,}03^{n+1} - \frac{1}{1{,}03^n}}{0{,}03}$$

$$= \frac{1{,}03 - \frac{1}{1{,}03^n}}{0{,}03} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1{,}03 - 0}{0{,}03} = \frac{1{,}03}{0{,}03}$$

$\frac{1}{1{,}03^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$= \underline{\underline{34{,}33}}.$$

Eller: $a_1 = 1$, $k = \frac{1}{1{,}03}$, ant. ledd $= n+1$

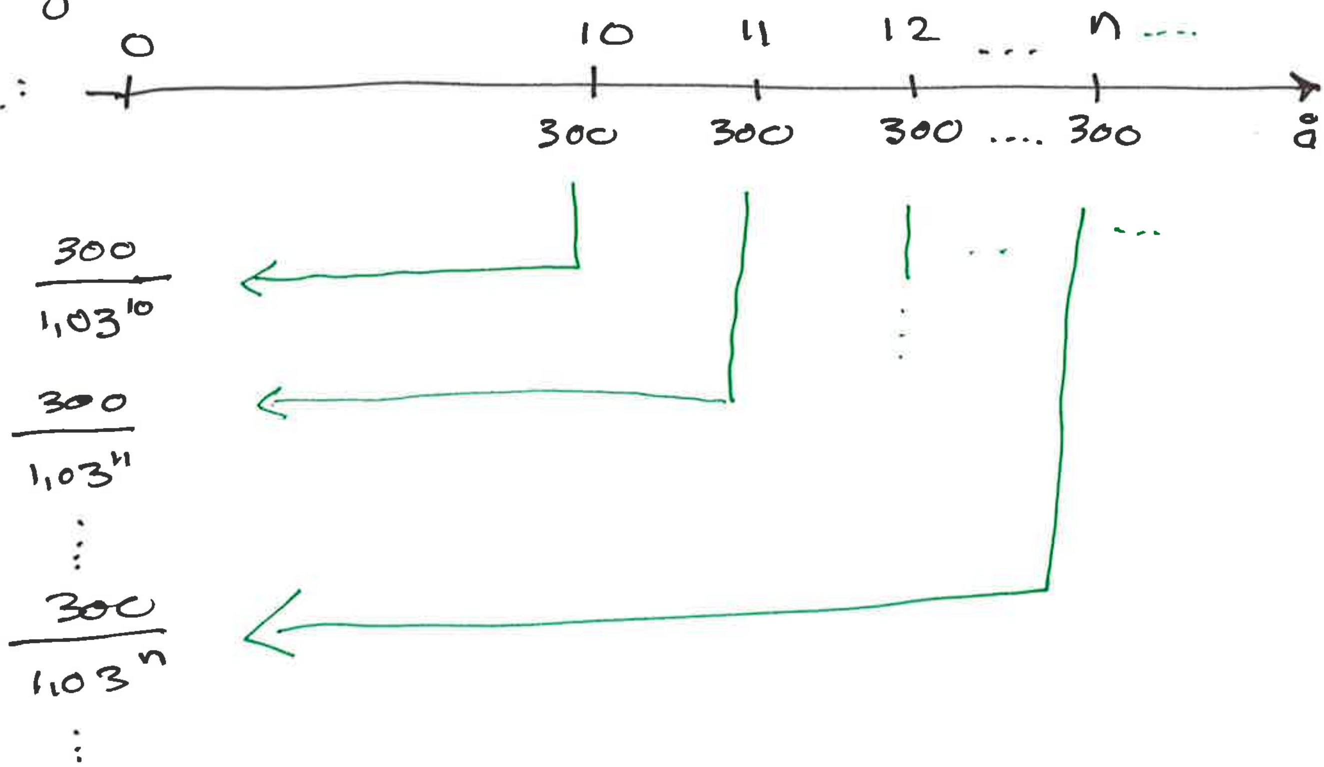
$$1 \cdot \frac{\frac{1}{1{,}03^{n+1}} - 1}{\frac{1}{1{,}03} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{1{,}03^{n+1}}}{1 - \frac{1}{1{,}03}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1 - 0}{1 - \frac{1}{1{,}03}}$$

$\frac{1}{1{,}03^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1{,}03 - 1}{1{,}03}\right)} = \frac{1{,}03}{0{,}03}$$

Eks: Du skal få utbetalt 300 tusen hvert år i all fremtid med første utbetaling om 10 år. Renten er 3 %. Beregn nåverdien.

Løsn:




Summen av disse nåverdiene gir nåverdien av kontantstrømmen:

$$\frac{300}{1{,}03^{10}} + \frac{300}{1{,}03^{11}} + \dots + \frac{300}{1{,}03^{n}} + \dots$$

$$= \frac{300}{1{,}03^{10}}\left(1 + \frac{1}{1{,}03} + \frac{1}{1{,}03^{2}} + \dots\right)$$

$$= \frac{300}{1{,}03^{10}} \cdot \frac{1{,}03}{0{,}03} = \underline{\underline{7664{,}17}}$$

# Kontinuerlig forrentning

Nominell rente : $r$

Antall terminer : $n$

Terminrente : $\frac{r}{n}$

Vekstfaktor pr. termin : $1 + \frac{r}{n}$ (NB!)

Årlig vekstfaktor : $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$

Effektiv rente : $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1$

---

Hvis antall terminer vokser vil den årlige vekstfaktoren nærme seg

$$e^r \quad \text{hvor } e = 2{,}71838\ldots$$

(Eulers tall)

Skriver $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^r$

[ eller: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r$ ]

Med kontinuerlig forrentning er

årlig vekstfaktor $\boxed{e^r}$

effektiv rente $e^r - 1$

Eks: $r = 3\%$ gir $e^{0,03} = \boxed{1{,}0305}$ (årlig vekstfaktor)

og $e^{0,03} - 1 = 3{,}05\%$ (effektiv rente)

– litt større en 3%.

Eks: 300 tusen om $n$ år (med 3% nominell rente og kontinuerlig forrentning)

$$\frac{300}{(e^{0,03})^n} = \frac{300}{e^{0,03\cdot n}}$$

$n=10$: $$\frac{300}{e^{0,03\cdot 10}} = \frac{300}{e^{0,3}} = 222,25$$

Nåverdien av kontantstrømmen

| 10 | 11 | 12 | .... | $n$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| 300 | 300 | 300 | | 300 | |

er da $$\frac{300}{(e^{0,03})^{10}} + \frac{300}{(e^{0,03})^{11}} + \ldots + \frac{300}{(e^{0,03})^n} + \ldots$$

$$= \frac{300}{(e^{0,03})^n}\Bigg(1 + \underbrace{\frac{1}{e^{0,03}} + \frac{1}{(e^{0,03})^2} + \ldots}_{\text{uendelig geom. rekke !}}\Bigg)$$

(som over) $$= \frac{300}{e^{0,03\cdot 10}} \cdot \frac{\overset{=\text{vekstfaktor}}{e^{0,03}}}{\underset{=\text{eff. rente}}{e^{0,03}-1}} = \frac{300}{(e^{0,03})^9\cdot(e^{0,03}-1)}$$

$$= \underline{\underline{7519,86}}$$

## 2. Lineære og kvadratiske likninger

Et lineært uttrykk : $ax + b$ (a og b er gitte tall)

Eks: $4x - 3$ $(a = 4, b = -3)$

En lineær likning: En likning som kan gjøres til likningen $\underbrace{ax + b = 0}_{\text{standardformen til en lineær likning.}}$

Eks: $2x + 5 = 3x - 8$

legger til 8 på begge sider

$2x + 13 = 3x$

trekker fra 3x på begge sider

$-x + 13 = 0$

på standardform med $a = -1$ og $b = 13$

Eks: $\dfrac{1}{x+3} = \dfrac{2}{x+4} \quad \Big| \cdot (x+3)\cdot(x+4)$

$(x+4) = 2(x+3)$

$x + 4 = 2x + 6$

$-x - 2 = 0$ på std. form $(a=-1, b=-2)$

$(x \neq -3$ og $x \neq -4)$

Et kvadratisk uttrykk : $ax^2 + bx + c$ ($a, b, c$ er gitte tall)

En kvadratisk likning : kan skrives på <u>standardformen</u> $ax^2 + bx + c = 0$

**Eks:** $3x + 9 = (x-1)(x+3)$

ekv. med : $3x + 9 = x^2 + 2x - 3$

trekker fra 9 og 3x på b.s.

$x^2 - x - 12 = 0$ $(a=1, b=-1, c=-12)$

**Eks:** $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = 3 \quad \Big| \cdot x(x+1)$

$x+1 + 2x = 3x(x+1)$

$3x + 1 = 3x^2 + 3x$

trekker fra 3x + 1 på b.s.

$3x^2 - 1 = 0$ $(a=3, b=0, c=-1)$

$(x \neq 0, \ x \neq -1)$

---

Hvis $a \neq 0$ finnes det en formel for løsningene („abc-formelen")

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Eks:** $3x^2 + 4x - 5 = 0$ $(a=3, b=4, c=-5)$

abc-formelen gir $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 3\cdot(-5)}}{2\cdot 3}$

$$= -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{16+60}}{6} = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{4\cdot 19}}{6}$$

$$= -\frac{2}{3} \pm \frac{\cancel{\sqrt{4}}\cdot\sqrt{19}}{\cancel{2}\cdot 3} = \underline{\underline{-\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{19}}{3}}}.$$

---

tre tilfeller: $b^2 - 4ac > 0$ gir to ulike røtter

$b^2 - 4ac = 0$ gir en løsning (rot)

$b^2 - 4ac < 0$ gir ingen løsning.

Oppg: Finn antall løsninger på likningene

a) $x^2 + 5x + 4{,}6 = 0$ $\quad 5^2 > 4\cdot 4{,}6$ : to løsn.

b) $-x^2 + 2x - 1 = 0$ $\quad$ en løsn.

c) $4x^2 - 5x - 5 = 0$ $\quad$ to løsn.

---

abc-formelen er ofte litt tungvint:

Eks: $-3x^2 + 7 = 0$

trekker fra 7 på b.s.

$$-3x^2 = -7$$

deler på $-3$ på b.s.

$$x^2 = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

så $\underline{\underline{x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}}}$

Eks: $2x^2 - 6x = 0 \qquad (c=0)$

$$2(x^2 - 3x) = 0$$

$$2x(x-3) = 0$$

enten $2x = 0$ eller $x - 3 = 0$

så $x = \underline{\underline{0}}$ , $x = \underline{\underline{3}}$

NB: $a \cdot b = 0$ betyr at $a=0$ eller $b=0$
(eller begge deler)

Oppg: $(2x+5)(3x-4) = 0$

Løsn: Enten $2x+5=0$ eller $3x-4=0$

dvs $2x = -5$ dvs $3x = 4$

$x = \underline{\underline{-\frac{5}{2}}}$ , $x = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

---

Fullføre kvadratet

Eks: $\underbrace{x^2 + 6x}\, - 16 = 0$

Påstår at $x^2 + \boxed{6}x = (x+3)^2 - 9$

$:2 \qquad (\ )^2$

fordi $(x+3)^2 \overset{\text{kvadrat-setn.}}{=} x^2 + 6x + 9$

Derfor kan likningen skrives som

$$(x+3)^2 \overbrace{- 9 - 16}^{-25\ (=c)} = 0$$

dvs $(x+3)^2 = 25$ så $x+3 = -5$ el. $x+3 = 5$

dvs $x = \underline{\underline{-8}}$ , $x = \underline{\underline{2}}$

Oppg: Løs likningene ved fullføre kvadratet.

a) $x^2 - 10x + 9 = 0$

b) $x^2 + 7x = -6$

Løsn (a): $(x-5)^2 - 25 + 9 = 0$

dvs $(x-5)^2 = 25 - 9 = 16$

dvs $x - 5 = \pm 4$, dvs $\underline{\underline{x = 1}}$, $\underline{\underline{x = 9}}$

(b) $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -6 + \frac{49}{4}$

$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49 - 24}{4} = \frac{25}{4}$

dvs $x + \frac{7}{2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} = \pm \frac{5}{2}$

dvs $x = -\frac{7}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{12}{2} = \underline{\underline{-6}}$

$x = -\frac{7}{2} + \frac{5}{2} = -\frac{2}{2} = \underline{\underline{-1}}$.

---

Hvis $r_1$ og $r_2$ er løsninger (røtter) til andregradslikningen $x^2 + bx + c = 0$

så vil $(x - r_1)(x - r_2) = x^2 - r_1 x - r_2 x + r_1 r_2$

$= x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$

og $b = -(r_1 + r_2)$ og $c = r_1 r_2$.

F.eks. i (b): $r_1 = -6$ og $r_2 = -1$ og

$-(r_1 + r_2) = -(-6-1) = 7 = b$

$r_1 r_2 = (-6)(-1) = 6 = c$

$$\text{Så} \quad x^2 + 7x + 6 = \overbrace{(x-(-6))}^{(x-r_1)}\overbrace{(x-(-1))}^{(x-r_2)}$$
$$= (x+6)(x+1)$$

<u>Oppg</u> Faktorisér andregradsuttrykket som et produkt av lineære uttrykk

a) $x^2+2x-35$

b) $3x^2-12x+12$

Løsn (a): Finner $r_1 = -7$ og $r_2 = 5$ og derfor
$$x^2+2x-35 = (x-(-7))(x-5) = \underline{\underline{(x+7)(x-5)}}$$

(b) Finner $r_1 = r_2 = 2$ så $x^2-4x+4 = (x-2)^2$
og $3x^2-12x+12 = 3(x^2-4x+4) = \underline{\underline{3(x-2)^2}}$.

---

## 3. Likninger med parametre.

Noen av tallene i likningen er ikke fastsatt (de kalles parametre).

— variabler („endogene størrelser") $\Big\{$ Vi bestemmer variablene ved å løse likn.

— parametre („eksogene størrelser") $\Big\{$ Verdiene av param. bestemmes „utenfra".

<u>Eks:</u> Vi selger en vare for $p$ kr.

Inntektsfunksjonen $I(x) = p \cdot x$ — $x$: variabel, $p$: parameter

hvor $x$ = ant. enheter