MET 1180, 6. forelesning, 20. sept. 2018, Runar Ile

Plan:
1. Repetisjon
2. Polynomdivisjon — kap 2.5
3. Rasjonale- og radikale likninger — 2.6–7
4. Ulikheter — 2.8

1. Repetisjon

Lineære uttrykk på standard form: $ax+b$

Kvadratiske —"— : ax^2+bx+c

Lineære likninger: De kan skrives som $ax+b=0$

Kvadratiske likn: —"— $\underbrace{ax^2+bx+c=0}_{\text{std. form}}$

Kvadratiske likn. har maks. 2 løsninger.

Finner løsningene ved å bruke abc-formelen eller fullføre kvadratet:

Oppg 4b ii Løs likn. $x^2-24x=25$ ved å fullføre kvadratet.

Løsn: $(x-12)^2 = 25+12^2$ [legger til 12^2, $p=6,5$]

dvs $(x-12)^2 = 169$

dvs $x-12=\sqrt{169}=13$ eller $x-12=-\sqrt{169}=-13$

dvs $x=\underline{\underline{25}}$ eller $x=\underline{\underline{-1}}$.

Faktorisering og røtter

Oppg 3 b ii Vi har fått oppgitt at $x^2+bx+c=0$ har løsningene $x = 3 \pm \sqrt{5}$. Da er

$$x^2+bx+c = \left(x - \overbrace{(3-\sqrt{5})}^{r_1}\right)\cdot\left(x - \overbrace{(3+\sqrt{5})}^{r_2}\right)$$

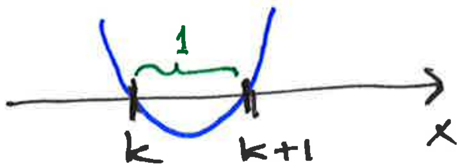
$$= x^2 - (3+\cancel{\sqrt{5}})x - (3-\cancel{\sqrt{5}})x + 3^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$= \underline{\underline{x^2 - 6x + 4}} \quad (b=-6,\ c=4)$$

Parametre: Tall som ikke har konkrete verdier. Brukes for å beskrive mange situasjoner samtidig.

Eks: Prisen på en vare er p kr.

Oppg 7 a Alle andregradsuttrykk på formen x^2+bx+c som har to nullpunkter med avstand 1 til hverandre kan skrives som $(x-k)(x-(k+1))$ hvor $x=k$ er det minste av nullpunktene



$$(x-k)(x-(k+1))$$

$$= x^2 - (k+1)x - kx + k(k+1)$$

$$= x^2 - \underbrace{(2k+1)}_{\text{summen av røttene}}x + \underbrace{k(k+1)}_{\text{produktet av røttene}}$$

2. Polynomdivisjon

Vil dividere et polynom $f(x)$ med et polynom $g(x)$ og få et polynom $q(x)$ og en (evt.) rest $r(x)$.

Dvs
$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \quad \Big| \cdot g(x)$$

dvs
$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$$

Eks:

$$\begin{array}{l} \ \ 3x^2 : x \quad 8x : x \\ \quad \ \ \shortparallel \qquad\ \ \shortparallel \end{array}$$

$$(3x^2+2x+1) : (x-2) = \underline{\underline{3x + 8 + \frac{17}{x-2}}}$$
$$\underline{-\ (3x^2 - 6x\ )}$$
$$8x + 1$$
$$\underline{-\ (\ 8x - 16\ )}$$

17 er resten fordi $\text{grad}(17) = 0 < 1 = \text{grad}(x-2)$

Dvs: $3x^2 + 2x + 1 = (3x+8)(x-2) + 17$

To poenger med polynomdivisjon:

A) Finne asymptoter til rasjonale funksjoner

Eks: $\dfrac{3x^2+2x+1}{x-2} = \boxed{3x+8} + \dfrac{17}{x-2}$

har vertikal asymptote for $x = 2$

og skrå asymptote: $y = 3x + 8$

B) Faktorisere polynomer i lineære faktorer

Eks: Faktorisér $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ i lineære faktorer.

Løsn: 1) Gjetter på et heltallig nullpunkt
[NB: Må dele 30]

prøver $x = -3$: $(-3)^3 - 4\cdot(-3)^2 - 11\cdot(-3) + 30$

$= -27 - 36 + 33 + 30 = 0$

Da er $(x - (-3))$ en faktor i polynomet!

2) Bruker polynomdivisjon til å faktorisere polynomet som et produkt av $(x-(-3)) = (x+3)$ og et andregradsuttrykk

$$(x^3 - 4x^2 - 11x + 30) : (x+3) = \overset{x^3:x}{x^2} - \overset{-7x^2:x}{7x} + \overset{10x:x}{10}$$

$$\begin{array}{l} -(x^3 + 3x^2) \\ \hline -7x^2 - 11x + 30 \\ -(-7x^2 - 21x) \\ \hline 10x + 30 \\ -(10x + 30) \\ \hline 0 \ \text{(resten)} \end{array}$$

Dvs: $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x^2 - 7x + 10)(x+3)$

3) Finner røttene til $x^2 - 7x + 10$: Det er $x = 2$, $x = 5$

Da er $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$

Dermed: $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = \underline{\underline{(x-2)(x-5)(x+3)}}$

Oppg: Faktorisér $x^3 - 2x^2 - 41x + 42$
som et produkt av lineære uttrykk.

Løsn: 1) Gjetter først på $x = 1$:
$1^3 - 2 \cdot 1^2 - 41 \cdot 1 + 42 = 1 - 2 - 41 + 42 = 0$

så $x - 1$ er en faktor.

2) Bruker polynomdivisjon for å finne andregradsfaktoren

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 41x + 42) : (x-1) = x^2 - x - 42 \\
-(x^3 - x^2) \\
\hline
\quad -x^2 - 41x + 42 \\
\quad -(-x^2 + x) \\
\hline
\qquad -42x + 42 \\
\qquad -(-42x + 42) \\
\hline
\qquad 0 \text{ (resten)}
\end{array}
$$

3) Ved abc får vi løsningene til $x^2 - x - 42$ som $x = 7$, $x = -6$

så $x^2 - x - 42 = (x-7)(x-(-6))$
$= (x-7)(x+6)$

og $x^3 - 2x^2 - 41x + 42 = \underline{(x-7)(x+6)(x-1)}$.

NB1: Det er ikke alltid mulig å faktorisere andregradsuttrykk

Eks: x^2+5, x^2+2x+3

NB2: Kan være vanskelig å gjette på en rot
- Behøver ikke være heltallsrøtter.

3. Rasjonale og radikale likninger

Rasjonal likning: $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$

hvor $p(x)$ og $q(x)$ er polynomer

Eks: $\dfrac{x+1}{(x-1)(x+3)} = 2$ Kan gjøres om til

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+3)} - \frac{2(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = 0$$

dvs $$\frac{x+1-2x^2-4x+6}{(x-1)(x+3)} = 0$$ ✓

dvs $$\frac{-2x^2-3x+7}{(x-1)(x+3)} = 0$$

dvs $-2x^2-3x+7 = 0$ (og $x \neq 1$, $x \neq -3$)

abc løser denne.

Radikale likninger

Den ukjente inngår i et rotuttrykk.

Eks: $2\sqrt{x+1} = x-2$

Kvadrerer på b.s.

$4(x+1) = x^2 - 4x + 4$

dvs $4x + 4 = x^2 - 4x + 4$

dvs $x^2 - 8x = 0$ dvs $x(x-8) = 0$

dvs $x = 0$ eller $x = 8$

NB: Ikke alle disse behøver å være løsninger til den opprinnelige likningen!

$\underline{x=0}$ vs: $2\sqrt{0+1} = 2$
hs: $0 - 2 = -2$
} ulike, så $x=0$ er ikke en løsning.

$\underline{x=8}$ vs: $2\sqrt{8+1} = 6$
hs: $8 - 2 = 6$
} like, så $x = 8$ er eneste løsning

Oppg Løs likningen $\sqrt{x+5} + 1 = \sqrt{3x+4}$

NB: $(\sqrt{x+5}+1)^2 = (\sqrt{x+5}+1)(\sqrt{x+5}+1)$

$= x+5 + 2\sqrt{x+5} + 1$

Løsn: Kvadrerer (=opphøyer i andre) på begge sider:

$$x+5+2\sqrt{x+5}+1 = 3x+4$$

dvs $2\sqrt{x+5} = 2x-2$

dvs $\sqrt{x+5} = x-1$

$(\ )^2=(\ )^2$ gir $(\sqrt{x+5})^2 = (x-1)^2$

dvs $x+5 = x^2-2x+1$

dvs $x^2-3x-4 = 0$

dvs $x=-1$ eller $x=4$

$\underline{x=-1}$ vs: $\sqrt{-1+5}+1 = 3$ } ulike, $x=-1$ er ingen løsn.
hs: $\sqrt{3\cdot(-1)+4} = 1$

$\underline{x=4}$: vs: $\sqrt{4+5}+1 = 4$ } like, så $x=\underline{\underline{4}}$ er eneste løsning.
hs: $\sqrt{3\cdot 4+4} = 4$

---

4. Ulikheter

$-2 < -1$ leses „minus to er mindre enn minus en"

$\frac{1}{9} > \frac{1}{11}$ leses „en nidel er større enn en ellevtedel"

også $\leq$ og $\geq$

En ulikhet er en påstand om at et uttrykk er $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ enn et annet uttrykk.

Løsningene på en ulikhet er alle verdier av x som gjør påstanden sann.

Eks: $x - 1 \geq 2$ er en påstand som er sann for $x = 5$ fordi $5 - 1 \geq 2$ er sant. Påstanden er usann for $x = 2$ fordi $2 - 1 \geq 2$ ikke er sant.

Løsningen på ulikheten er alle x slike at $x \geq 3$ (en uendelig mengde)

Skriver også $x \in [3, \infty\rangle$