MET 1180, 7. forelesning, 27. sept 2018, Runar Ile

1. Repetisjon
2. Funksjoner & grafer — kap 3.1-2
3. Lineære funksjoner & rette linjer — 3.3
4. Kvadratiske funksjoner & parabler — 3.4
5. Kostnads- og inntektsfunksjoner — 3.5

1. Repetisjon

Polynomdivisjon

$$f(x) : g(x) = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

polynomer

Bruk:

*) Finne asymptoter

*) Faktorisere polynomer

Hvis polynomet $f(x)$ har en rot r

så vil $f(x) : (x-r) = q(x)$ — et polynom av 1 grad mindre enn $f(x)$

Oppg 2 a $f(x) = x^3+6x^2-x-30$

Gjetter på at $x=2$ er en rot: $f(2) = 2^3+6\cdot 2^2-2-30$
$= 8+24-32=0$

Dermed er $(x-2)$ en faktor i $f(x)$. Vi finner kvot $f(x):(x-2)$ ved å gjøre polynomdiv:

$$
\begin{array}{l}
(x^3+6x^2-x-30):(x-2) = x^2+8x+15 \\
\underline{-(x^3-2x^2)\qquad\qquad} \\
\qquad 8x^2-x-30 \\
\quad \underline{-(8x^2-16x)\qquad} \\
\qquad\qquad 15x-30 \\
\qquad \underline{-(15x-30)} \\
\qquad\qquad 0 \text{ (resten)}
\end{array}
$$

Altså x^3+6x^2-x-30
$= \underbrace{(x^2+8x+15)}_{\text{røtter: } -3,\,-5}(x-2)$
$= (x+3)(x+5)(x-2)$

Hvis vi starter med et polynom av grad 4 gjetter, polynomdividerer og får et tredjegradspolynom. Så må vi gjette på nytt.

NB: Alle tre røttene i $f(x)$ er divisorer av konstantleddet: -3, -5 og 2 deler -30

Slik er det alltid for heltallsrøtter i heltallspolynomer.

Radikale likninger ("x under rottegnet")

Plan: Fjerne kvadratrøttene ved å opphøye i andre. Da må kvadratroten stå alene på den ene siden av likningen

Oppg 4 a (iv) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+4} = 1$

Isolérer en av kvadratrøttene:

$$\sqrt{2x+1} = 1 + \sqrt{x+4}$$

opphøyer vs og hs i andre

$$2x+1 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot\sqrt{x+4} + \left(\sqrt{x+4}\right)^2$$

dvs $2x+\cancel{1} = \cancel{1} + 2\sqrt{x+4} + x + 4$

dvs $x - 4 = 2\sqrt{x+4}$

opphøyer vs og hs i andre

$$(x-4)^2 = \left(2\cdot\sqrt{x+4}\right)^2$$

dvs $x^2 - 8x + \cancel{16} = 4\cdot(x+4) = 4x + \cancel{16}$

dvs $x^2 - 12x = 0$

$x(x-12) = 0$

dvs $x = 0$ eller $x = 12$

Må teste om dette gir løsninger av den opprinnelige likningen.

$\underline{x=0}$ vs: $\sqrt{2\cdot 0+1} - \sqrt{0+4} = \sqrt{1} - \sqrt{4} = 1-2 = -1$

hs: 1 - ulike, så $x=0$ er <u>ikke</u> en løsning.

$\underline{x=12}$ vs: $\sqrt{2\cdot 12+1} - \sqrt{12+4} = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5-4 = 1$

hs: 1 - like, så $x = \underline{\underline{12}}$ er eneste løsning.

<u>Ulikheter</u> Hvis vi mult. en ulikhet på hver side med et negativt tall, må ulikheten snus:

Eks: $-4 < -3 \quad |\cdot(-2)$

snudd!

$8 = (-4)(-2) > (-3)\cdot(-2) = 6$

<u>Oppg 5 c iii</u> $\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-5)(x+4)} < 1$

Utvei: Trekker fra 1 på b.s. og setter på felles brøk.

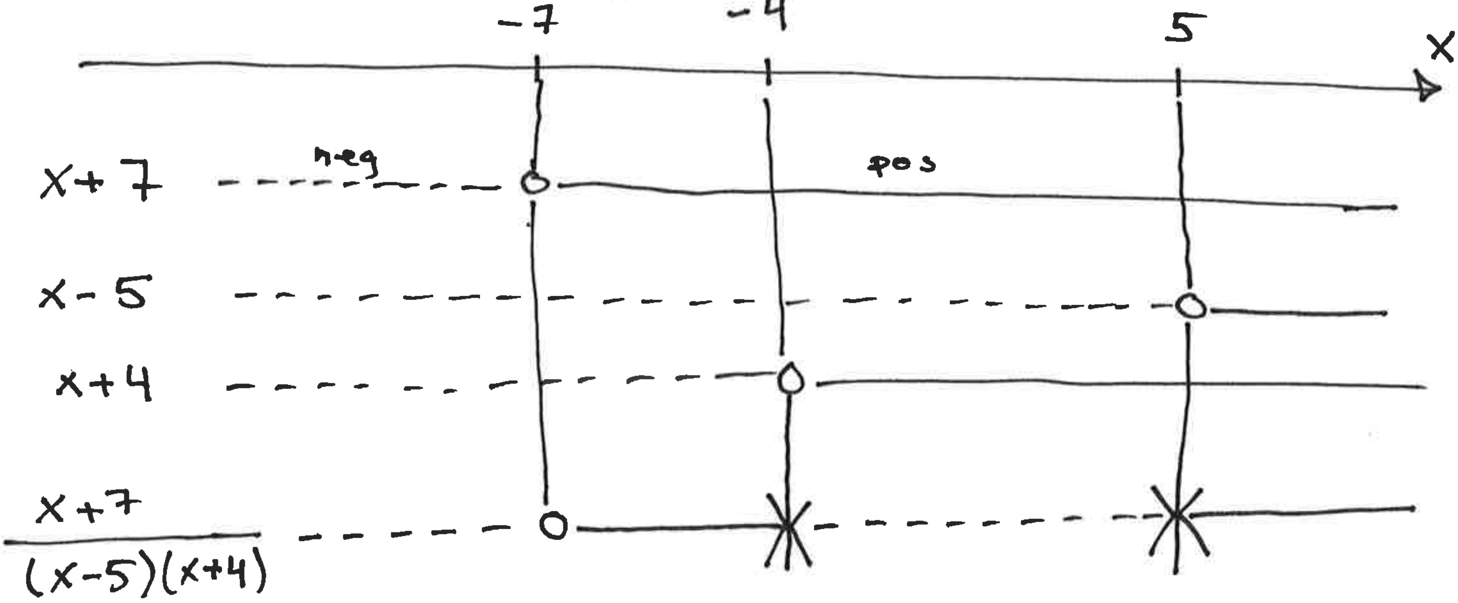
$$\frac{(x-2)(x+3)}{(x-5)(x+4)} - 1 < 0$$

$$\frac{\overbrace{(x-2)(x+3)}^{\cancel{x^2}+x-6} - \overbrace{(x-5)(x+4)}^{\cancel{x^2}-x-20}}{(x-5)(x+4)} < 0$$

$$\frac{\overbrace{2x+14}^{2(x+7)}}{(x-5)(x+4)} < 0 \quad |:2$$

$$\frac{(x+7)}{(x-5)(x+4)} < 0$$

Bruker fortegnsskjema:



Så $\underline{\underline{x < -7 \text{ eller } -4 < x < 5}}$

[Alt: $\underline{\underline{x \in \langle -\infty, -7\rangle \cup \langle -4, 5\rangle}}$]

---

2. Funksjoner & grafer

x	...
f(x)	...

En funksjon er en tabell med funksjonsverdier

Eks: Empiriske funksjoner

- måler temperatur som en funksjon av tiden.
- fertilitet
- laksepris
- alle slags „indekser" (KPI)

Ingen algebraiske uttrykk!

Definisjonsområde: $x \in [1962, 2016] = D_f$

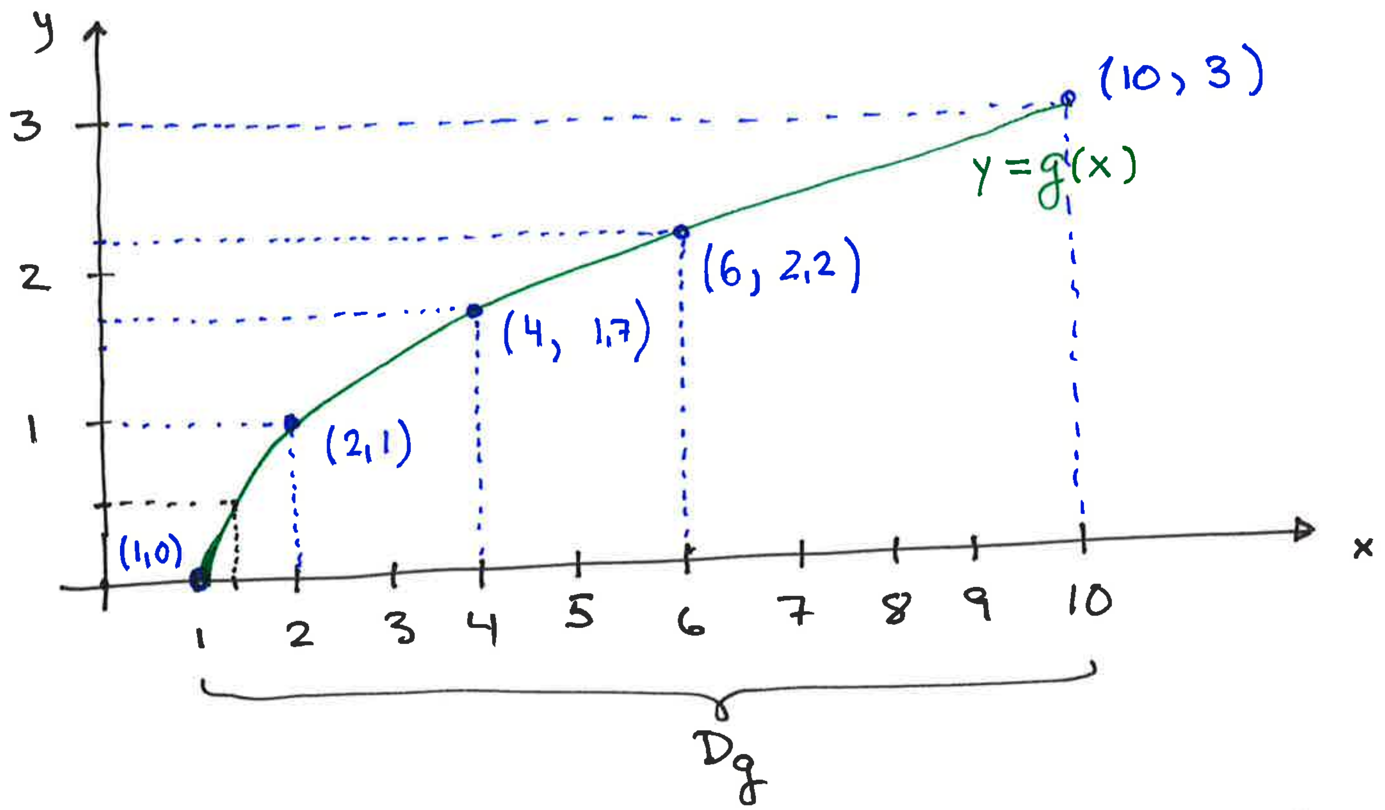
x årstall, f(x) = gjennomsnitt av førstegangsfødenes alder i år x.

Eks: $g(x) = \sqrt{x-1}$. Størst mulig definisjonsområde er $D_g = [1, \infty\rangle$ (dvs $x \geq 1$)

Vil tegne grafen til $g(x)$ med $D_g = [1, 10]$

Lager en tabell

x	1	2	4	6	10
$g(x)$	0	1	1,7	2,2	3



Verdimengden: De y-verdiene vi får med x-verdiene i definisjonsmengden.

Eks: Fordi $D_g = [1, 10]$, så er $V_g = [0, 3]$

- Alle y-verdiene fra og med 0 t.o.m 3 nås når x løper fra 1 til 10.

Funksjon

modeller / teori — uttrykk

situasjon
„alder ved første fødsel"
„lakseprisen"

tabell

Uke	Laksepris
⋮	⋮

graf

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}$
empiriske funksjoner

Oppg a) Tegn grafen til $f(x) = 5 - |x-3|$ med $D_f = [0, 8]$

b) Finn V_f.

---

3. Lineære funksjoner $\quad f(x) = ax + b$

Eks: $f(x) = 3x \boxed{-2}$

$f(9) = 3 \cdot 9 - 2 = 25$

$f(10) = 3 \cdot 10 - 2 = 28$ $\quad +3$ = stigningstallet

$f(11) = 3 \cdot 11 - 2 = 31$ $\quad +3$ = —"—

$f(0) = 3 \cdot 0 - 2 = \boxed{-2}$

Grafene til lineære funksjoner er linjer.

Ettpunktsformelen: Gir oss uttrykket til en lineær funksjon hvis vi har stigningstallet s og et punkt (x_0, y_0) på grafen

$$y - y_0 = s(x - x_0)$$

Eks: $s = 3$ og $(\underset{x_0}{9}, \underset{y_0}{25})$ ligger på grafen.

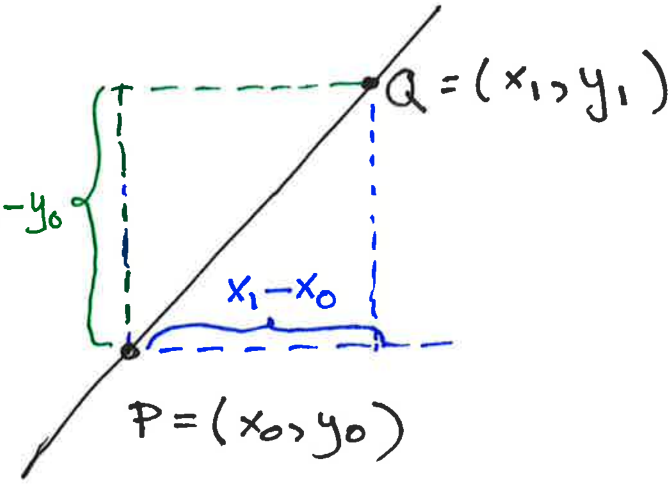
$$y - 25 = 3(x - 9)$$

dvs $y = 3x - 3 \cdot 9 + 25 = 3x - 2$

NB: Uttrykket er også bestemt av to punkter på grafen: $P = (x_0, y_0)$, $Q = (x_1, y_1)$

- fordi stigningstallet er

$$s = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\text{endringen i høyde}}{\text{endringen i lengde}}$$



Eks: $(x_0, y_0) = (9, 25)$
$(x_1, y_1) = (11, 31)$

Da er $s = \frac{31 - 25}{11 - 9} = \frac{6}{2} = 3$

Så bruker vi ettpunktsformelen.

4. Kvadratiske funksjoner & parabler

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Hvis vi vil tegne grafen er denne formen bedre:

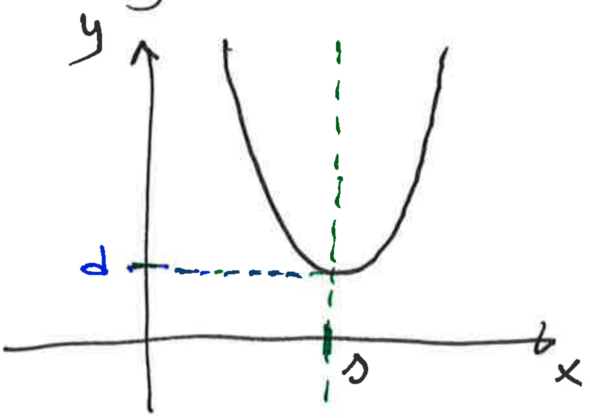
$$f(x) = a(x - s)^2 + d$$

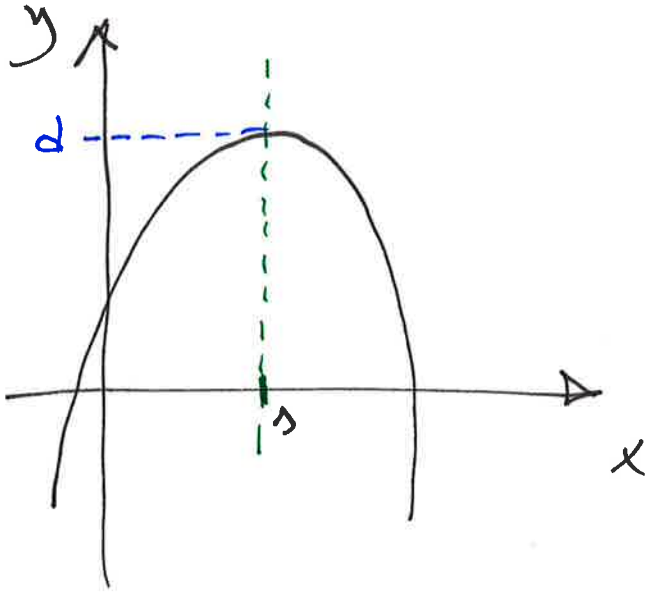
tall

Hvis $a > 0$ har $f(x)$ en minimumsverdi for $x = s$ og da er $f(s) = d$

Hvis $\boxed{a < 0}$ har $f(x)$ en maksimalverdi for $x = s$ og $f(s) = d$

Vansett: Grafen er symmetrisk om linjen $x = s$.





Eks: $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$= (x-1)^2 + 2$ $\quad s = 1, \; d = 2$