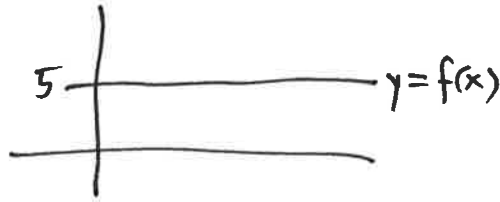
MET 1180, 9. forelesning, 4. okt. 2018, Runar Ile

1. Repetisjon
2. Rasjonale funksjoner, hyperbler og asymptoter — kap 3.9
3. Kontinuitet og skjæringssetningen — kap 3.10
4. Sammensatte og omvendte funksjoner — kap 3.11

1. Repetisjon

Konstantfunksjonen

$$f(x) = 5$$



er både voksende og avtagende, men hverken strengt voksende eller strengt avtagende [fire definisjoner]

Sirkler $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 10$

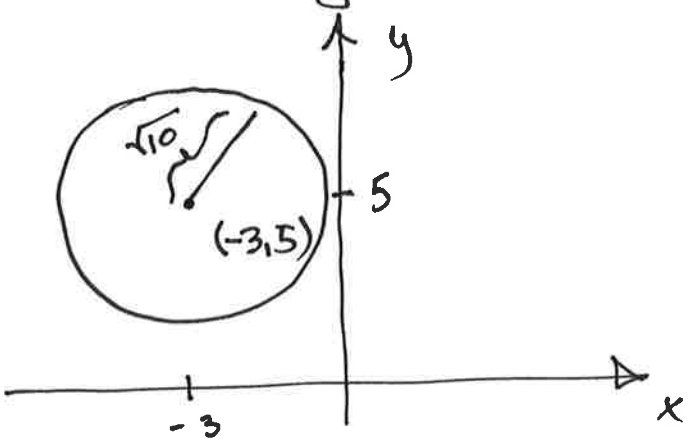
har sentrum $S = (-3, 5)$ og radius $r = \sqrt{10}$

– vi leser dette rett av standardformen.

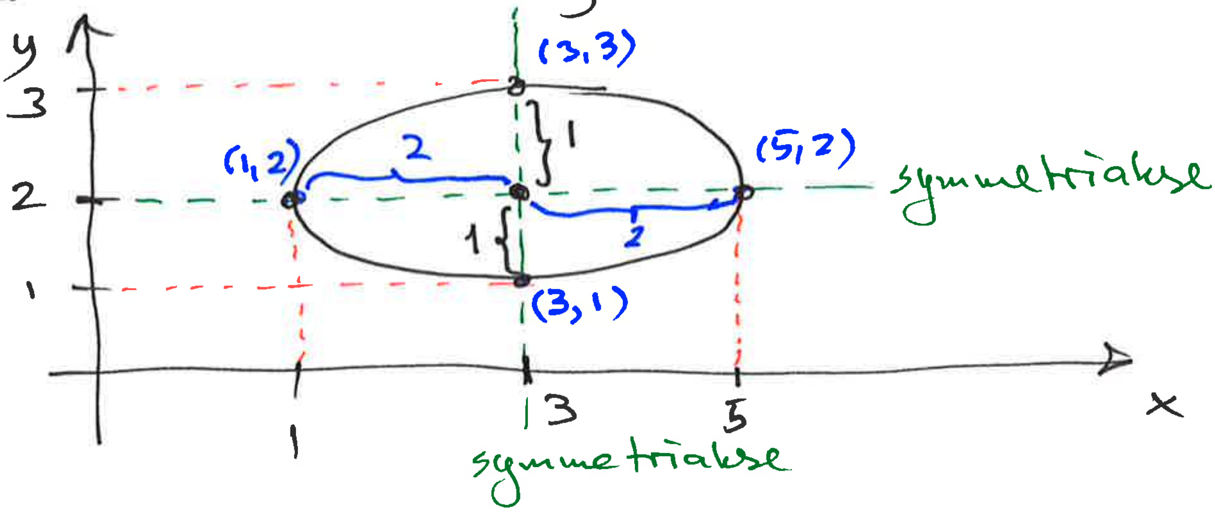
NB: Likningen kan også skrives slik:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 10$$

dvs $x^2 + y^2 + 6x - 10y = -24$



Ellipser: Har sentrum og to halvakser



Sentrum $S = (3, 2)$.

Halvaksen i x-retning er $a = 2$

Halvaksen i y-retning er $b = 1$

Likningen for punktene på ellipsen:

$$\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{1^2} = 1$$

alltid 1

a b

Mønster: $$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

$S = (x_0, y_0)$ og halvakser a og b.

$\cdot 4$

$$x^2 - 6x + 9 + 4(y^2 - 4y + 4) = 4$$

dvs $x^2 + 4y^2 - 6x - 16y = 4 - 9 - 16 = -21$

– ikke så lett å se geometrien. For å komme tilbake fullfører vi kvadratene.

2. Rasjonale funksjoner, hyperbler og asymptoter

Rasjonal funksjon $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ polynomer

Eks: $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+3}$

For grafen se GeoGebra-filen «Rasjonal funksjon 1»

Fordi $f(x) = \dfrac{\frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \dfrac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2}} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0^+$

$\xrightarrow[x \to -\infty]{} 0^-$

Dette betyr at $y = 0$ (tekene på x-aksen) er en horisontal asymptote for $f(x)$.

Eks: $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)(x-5)}$

NB: $f(x)$ er ikke definert for $x = 1$ og $x = 5$.

Hvis $x \to 1^-$ (nærmer seg 1 nedenfra)

da vil $x - 1 \longrightarrow 0^-$ (nærmer seg 0 nedenfra)

mens $2x+1 \longrightarrow 2 \cdot 1 + 1 = 3$

og $x - 5 \longrightarrow 1 - 5 = -4$

Dermed vil $f(x) = \dfrac{\overbrace{2x+1}^{\to 3}}{\underbrace{(x-1)}_{\to 0^-}\underbrace{(x-5)}_{\to -4}} \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$

Men hvis $x \to 1^+$ (x nærmer seg 1 ovenfra)

så vil $x-1 \to 0^+$, $2x+1 \to 3$ og $x-5 \to -4$

Dermed vil $f(x) = \dfrac{\overset{\to 3}{2x+1}}{\underset{0^+}{(x-1)}\underset{-4}{(x-5)}} \xrightarrow[x \to 1^+]{} -\infty$

Altså er $x = 1$ en vertikal asymptote

Oppg: Undersøk $f(x)$ når $x \to 5^-$ og $x \to 5^+$

Løsn: $2x+1 \xrightarrow[x\to 5]{} 2\cdot 5+1 = 11$

$x-1 \xrightarrow[x\to 5]{} 5-1 = +4$

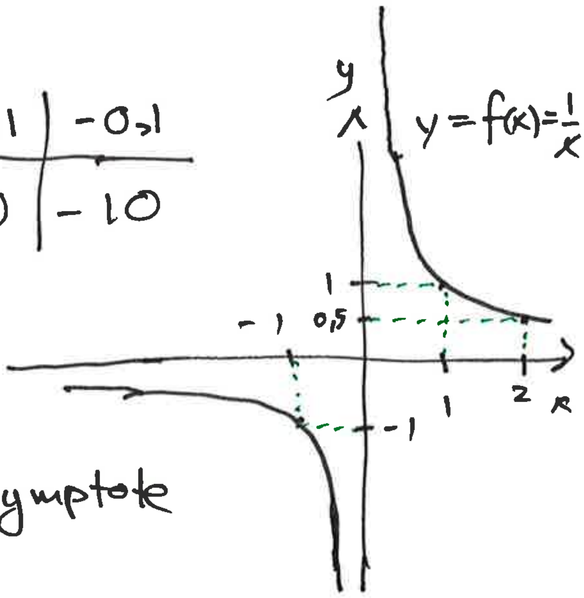
$x-5 \xrightarrow[x\to 5^-]{} 0^-$ så $f(x) = \dfrac{\overset{\to 11}{2x+1}}{\underset{4}{(x-1)}\underset{0^-}{(x-5)}} \xrightarrow[x\to 5^-]{} -\infty$

$x-5 \xrightarrow[x\to 5^+]{} 0^+$ så $f(x) = \dfrac{\overset{\to 11}{2x+1}}{\underset{4}{(x-1)}\underset{0^+}{(x-5)}} \xrightarrow[x\to 5^+]{} \infty$

For grafen se GeoGebra-filen «Rasjonal funksjon 2»

<u>Hyperbler</u> $f(x) = \dfrac{1}{x}$

x	1	2	-1	-2	10	-10	0,1	-0,1
$f(x)$	1	0,5	-1	-0,5	0,1	-0,1	10	-10



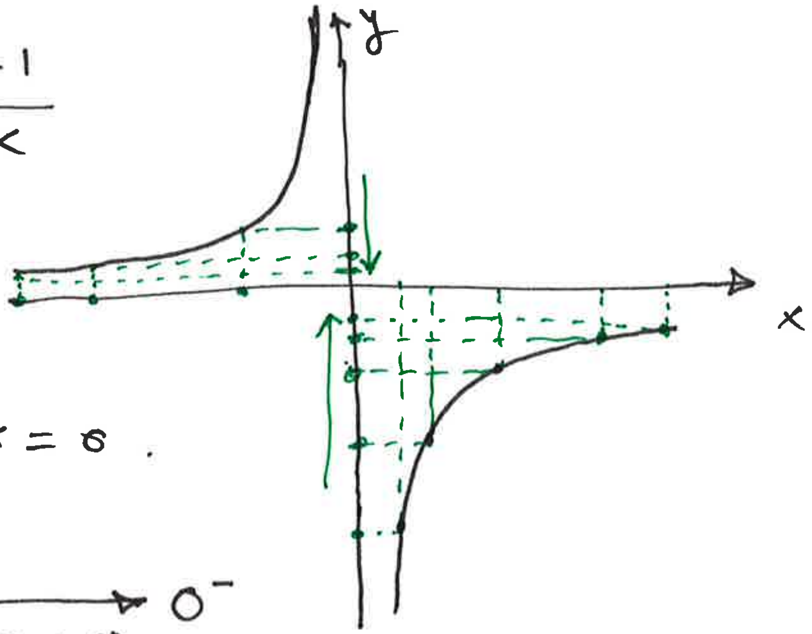
NB: $f(x)$ er ikke definert for $x = 0$

(4) Faktisk er $x = 0$ en vertikal asymptote

Eks: $f(x) = \frac{-1}{x}$

ikke definert for $x = 0$

og vertikal asymptote for $x = 0$.



Ser at $f(x) = \frac{-1}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0^-$

$f(x) = \frac{-1}{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0^+$

Eks: $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$ – også en hyperbel!

Polynomdivisjon:
$$\begin{array}{l} (3x-5) : (x-2) = \boxed{3} + \frac{1}{(x-2)} \\ -(3x-6) \\ \hline \quad 1 \text{ (resten)} \end{array}$$

For grafen se GeoGebra-filen «Rasjonal funksjon 3»

– en hyperbel med vertikal asymptote $x = 2$

og horisontal asymptote $y = \boxed{3}$

Skrå asymptoter

Eks: $f(x) = x - 5 + \frac{2}{x-4}$ har vertikal asymptote for $x = 4$

Setter $g(x) = x - 5$

For grafen se GeoGebra-filen «Rasjonal funksjon 4»

Fordi $f(x) - g(x) = \frac{2}{x-4} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$

sier vi at $y = g(x)$ er en (skrå) asymptote for $f(x)$.

NB: $f(x) = \dfrac{(x-5)(x-4)+2}{(x-4)} = \dfrac{x^2-9x+22}{x-4}$

For å komme tilbake til den „gode" formen:

– polynomdivisjon.

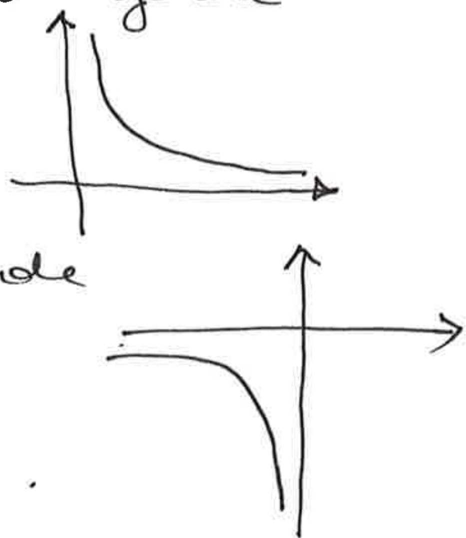
---

3. Kontinuitet og skjæringssetningen

En funksjon er kontinuerlig hvis grafen er sammenhengende for alle intervaller i definisjonsområdet.

Eks: $f(x) = \frac{1}{x}$ er definert for alle $x \neq 0$.

For $x \in \langle 0, \infty \rangle$ er grafen sammenhengende

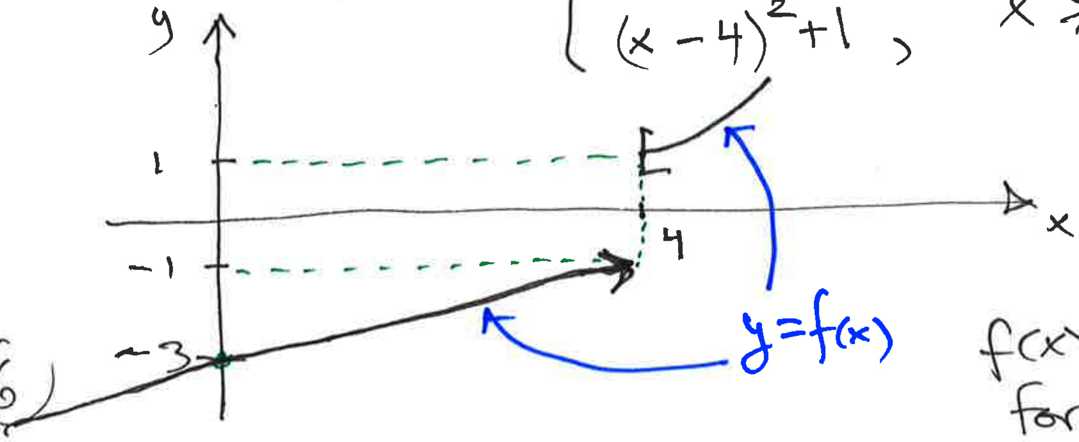


For $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$ er grafen også sammenhengende

Altså er $f(x) = \frac{1}{x}$ kontinuerlig i hele sitt definisjonsområde.

Alle „vanlig" funksjoner er kontinuerlige

Eks: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - 3, & x < 4 \\ (x-4)^2+1, & x \geq 4 \end{cases}$



$f(3,9) = \frac{3,9}{2} - 3 = -1,05$

$f(4) = 1$

$f(x)$ ikke kontinuerlig for $x = 4$. [hopp!]

Skjæringssetningen Hvis $f(x)$ er kontinuerlig i et intervall I og $a, b \in I$ med $f(a) < 0$ og $f(b) > 0$ så finnes det et nullpunkt for $f(x)$ mellom a og b.

Eks: $f(x) = x\sqrt{2x+5} - \frac{10}{x}$ har et nullpunkt mellom $x = 1$ og $x = 10$ fordi

$$f(1) = 1 \cdot \sqrt{2 \cdot 1 + 5} - \frac{10}{1} = \sqrt{7} - 10 < 0$$

$$f(10) = 10 \cdot \sqrt{2 \cdot 10 + 5} - \frac{10}{10} = 10 \cdot 5 - 1 > 0$$

og $f(x)$ er kontinuerlig for $x > 0$

Da gir skjæringssetningen at det finnes et nullpunkt mellom 1 og 10.

---

4. Sammensatte og omvendte funksjoner

Anta $u(x)$ og $g(u)$ er funksjoner kan vi sette de sammen

$$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{g} g(u(x))$$

Vi skriver $f(x) = g(u(x))$.

Eks $u(x) = 2x+3$, $g(u) = \sqrt{u^2+1}$

Da er sammensetn. $f(x) = g(u(x)) = \sqrt{(2x+3)^2+1}$

$$= \underline{\underline{\sqrt{4x^2+12x+10}}}$$

Eks: $u(x) = \sqrt{x-1}$ $\quad (x \geq 1)$

$g(u) = u^2 + 1$ $\quad (u \geq 0)$

Da er $f(x) = g(u(x)) = \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 1$

$= x - 1 + 1 = x$

Vi kan også sette sammen den andre veien:

$h(u) = u(g(u)) = \sqrt{g(u) - 1}$

$= \sqrt{u^2+1-1} = \sqrt{u^2} = |u| = u$

Dette betyr at $u(x)$ og $g(u)$ er omvendte funksjoner

Eks: Bestem den omvendte funksjonen til $f(x) = \dfrac{2x-3}{4x-5}$ $\quad \left(x \neq \frac{5}{4}\right)$

Idé: Vi setter $y = \dfrac{2x-3}{4x-5}$ og løser for x

Svar: (masse regning) $x = \dfrac{5y-3}{4y-2} = h(y)$

For grafene se GeoGebra-filen «Rasjonal funksjon 5»

Oppg: Sjekk at $f(h(y)) = y$ og $h(f(x)) = x$.