MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2018
Runar Ile

Innlevering 1 – Løsningsforslag

NB: Det finnes alternative løsninger på mange av oppgavene som kan være (minst) like gode som de jeg har valgt her.

Oppgave 1

(a) (i) Vi setter $u = x^2$ for å få en andregradslikning: $u^2 - 9u - 22 = 0$ som har løsninger $u = -2$ og $u = 11$, dvs $x^2 = -2$ som ikke har noen løsninger, og $x^2 = 11$ som har løsningene $x = \underline{\underline{\pm\sqrt{11}}}$.

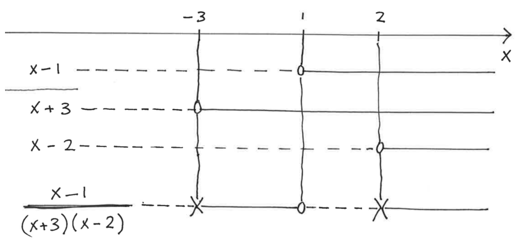
(ii) Vi setter $u = \sqrt{x}$ og får en andregradslikningen i (i) som fremdeles har løsningene $u = -2$ og $u = 11$, dvs $\sqrt{x} = -2$ som ikke har noen løsninger, og $\sqrt{x} = 11$ som har løsningen $x = \underline{\underline{121}}$.

(iii) Vi setter $u = \frac{1}{x}$ og får igjen andregradslikningen i (i), dvs $\frac{1}{x} = -2$ som gir $x = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$, og $\frac{1}{x} = 11$ som gir $x = \underline{\underline{\frac{1}{11}}}$.

(b) Vi isolerer en av røttene på den ene siden av likhetstegnet: $\sqrt{x-1} = 5 - \sqrt{2x-1}$ og opphøyer begge sider i andre – «kvadrerer». NB: Dette kan introdusere «falske løsninger». Vi får $x - 1 = 25 - 10\sqrt{2x-1} + 2x - 1$. Så isolerer vi rotuttrykket igjen: $10\sqrt{2x-1} = x + 25$ og kvadrerer begge sider (dette kan igjen introdusere «falske løsninger»):
$100(2x-1) = x^2 + 50x + 625$, dvs $x^2 - 150x + 725 = 0$. Her kan vi bruke abc-formelen eller fullføre kvadratet: $(x-75)^2 = 75^2 - 725 = 4900$, dvs $x = 75 \pm 70$, dvs $x = 5$ eller $x = 145$. Vi må teste om noen av disse tallene løser den opprinnelig likningen.
$x = 5$ gir vs $= \sqrt{2 \cdot 5 - 1} + \sqrt{5-1} = 3 + 2 = 5$ og hs $= 5$ så $x = \underline{\underline{5}}$ er en løsning.
$x = 145$ gir vs $= \sqrt{2 \cdot 145 - 1} + \sqrt{145-1} = 17 + 12 = 29$ mens hs $= 5$ så $x = 145$ er ikke en løsning.

Oppgave 2 Løs ulikhetene.

(a) Fordi vi har 0 på den ene siden av ulikheten og en kvotient med produkter av lineære faktorer i teller og nevner kan vi sette opp fortegnsskjema direkte:



Dette gir at $\underline{\underline{x < -3 \text{ eller } 1 \leqslant x < 2}}$. Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x \in \langle \infty, -3\rangle \cup [1,2\rangle}}$.

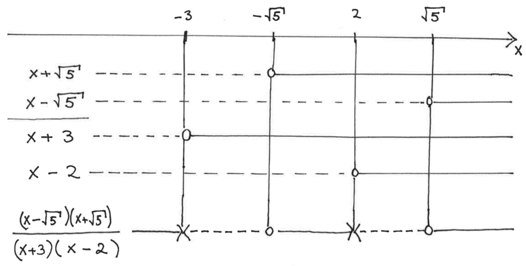
(b) Vi trekker fra 1 på begge sider og setter på felles brøk:

$$\frac{(x-1)-(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-2)} \leqslant 0 \qquad \text{dvs} \qquad \frac{-(x^2-5)}{(x+3)(x-2)} \leqslant 0$$

Vi multipliserer på begge sider med -1 og faktoriserer telleren:

$$\frac{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}{(x+3)(x-2)} \geqslant 0$$

Nå kan vi sette opp fortegnsskjema:



Dette gir at $\underline{\underline{x < -3 \text{ eller } -\sqrt{5} \leqslant x < 2 \text{ eller } \sqrt{5} \leqslant x}}$.
Alternativ skrivemåte: $\underline{\underline{x \in \langle \infty, -3\rangle \cup [-\sqrt{5}, 2\rangle \cup [\sqrt{5}, \infty\rangle}}$.

Oppgave 3 Vi forsøker med $x = -1$ og ser at det gir en rot i fjerdegradspolynomet: $(-1)^4 + 7(-1)^3 - 73(-1)^2 - 163(-1) - 84 = 1 - 7 - 73 + 163 - 84 = 0$. Polynomdivisjon gir $x^4 + 7x^3 - 73x^2 - 163x - 84 = (x^3 + 6x^2 - 79x - 84)(x + 1)$. Vi forsøker med $x = -1$ og ser at det gir en rot i $x^3 + 6x^2 - 79x - 84$: $(-1)^3 + 6(-1)^2 - 79(-1) - 84 = -1 + 6 + 79 - 84 = 0$. Polynomdivisjon gir $x^3 + 6x^2 - 79x - 84 = (x^2 + 5x - 84)(x + 1)$. Vi finner (f. eks. ved abc-formelen) at røttene til $x^2 + 5x - 84$ er -12 og 7. Dermed får vi $x^2 + 5x - 84 = (x + 12)(x - 7)$. Alt i alt har vi fått faktoriseringen $x^4 + 7x^3 - 73x^2 - 163x - 84 = \underline{\underline{(x + 1)^2(x + 12)(x - 7)}}$.

Oppgave 4

(a) Nåverdien er $\frac{2\,\text{mill}}{1{,}018^{10}} = \underline{\underline{1{,}67}}$ millioner.

(b) Fremtidsverdien etter 6 år til nåverdien i (a) med 1,8% rente er $\frac{2\,\text{mill}}{1{,}018^{10}} \cdot 1{,}018^6$.
Fremtidsverdien til dette etter 4 nye år med rente 3,1% er
$\frac{2\,\text{mill}}{1{,}018^{10}} \cdot 1{,}018^6 \cdot 1{,}031^4 = \underline{\underline{2{,}10\,\text{millioner}}}$.

(c) Vi forkorter beregningen i (b):

$$\frac{2\,\text{mill}}{1{,}018^{10}} \cdot 1{,}018^6 \cdot 1{,}031^4 = 2\,\text{mill} \cdot 1{,}018^{-4} \cdot 1{,}031^4 = 2\,\text{mill} \cdot \left(\frac{1{,}031}{1{,}018}\right)^4$$

(d) Nåverdien til 2 millioner 4 år før med 3,1% rente er $\frac{2\,\text{mill}}{1{,}031^4}$. Nåverdien av dette igjen 6 år før med 1,8% rente er

$$\frac{\frac{2\,\text{mill}}{1{,}031^4}}{1{,}018^6} = \underline{\underline{1{,}57\,\text{millioner}}}$$

(e) Brøkregning med uttrykket i (d) gir

$$\frac{\frac{2\,\text{mill}}{1{,}031^4}}{1{,}018^6} = \frac{2\,\text{mill}}{1{,}031^4 \cdot 1{,}018^6}$$

Oppgave 5

(a) Vi summerer fremtidsverdien til hver av beløpene:

$$-20 \cdot 1{,}1^7 - 20 \cdot 1{,}1^5 + 30 \cdot 1{,}1 + 45 = \underline{\underline{6{,}82}}$$

(b) Vi summerer nåverdien til hvert av beløpene:

$$-20 - \frac{20}{1{,}1^2} + \frac{30}{1{,}1^6} + \frac{45}{1{,}1^7} = \underline{\underline{3{,}50}}$$

(c) Vi multipliserer uttrykket for nåverdiene i (b) med $1{,}1^7$ og får

$$\begin{aligned}&\left(-20 - \frac{20}{1{,}1^2} + \frac{30}{1{,}1^6} + \frac{45}{1{,}1^7}\right) \cdot 1{,}1^7\\ &= -20 \cdot 1{,}1^7 - \frac{20}{1{,}1^2} \cdot 1{,}1^7 + \frac{30}{1{,}1^6} \cdot 1{,}1^7 + \frac{45}{1{,}1^7} \cdot 1{,}1^7\\ &= -20 \cdot 1{,}1^7 - 20 \cdot 1{,}1^5 + 30 \cdot 1{,}1 + 45\end{aligned}$$

som er uttrykket for fremtidsverdien i (a). Det samme kan vi gjøre med en vilkårlig rente r:

$$\begin{aligned}
&\left(-20-\frac{20}{(1+r)^2}+\frac{30}{(1+r)^6}+\frac{45}{(1+r)^7}\right)\cdot(1+r)^7\\
&=-20\cdot(1+r)^7-\frac{20}{(1+r)^2}\cdot(1+r)^7+\frac{30}{(1+r)^6}\cdot(1+r)^7+\frac{45}{(1+r)^7}\cdot(1+r)^7\\
&=-20\cdot(1+r)^7-20\cdot(1+r)^5+30\cdot(1+r)+45
\end{aligned}$$

Her er det første uttrykket nåverdien til kontantstømmen om 7 år med rente r multiplisert med $(1+r)^7$ mens det siste uttrykket er fremtidsverdien til kontantstømmen om 7 år med rente r.

(d) Sålenge renten r er større enn -100% vil $(1+r)^7$ være et positivt tall. Dermed vil $K_7 = K_0\cdot(1+r)^7$ ha samme fortegn som K_0. Dette betyr at man kan bruke både nåverdien og fremtidsverdien til å vurdere om investeringskontrakten er gunstig (positiv K_0, positiv K_7) eller ugunstig (negativ K_0, negativ K_7) eller rettferdig ($K_0 = 0$, $K_7 = 0$) gitt at renten er r.

Oppgave 6

(a) Vi summerer nåverdiene til Kåres 25 innbetalinger:

$$\frac{180\,000}{1{,}06^5}+\frac{180\,000}{1{,}06^6}+\cdots+\frac{180\,000}{1{,}06^{28}}+\frac{180\,000}{1{,}06^{29}}$$

Dette er en geometrisk rekke begge veier. Hvis vi summerer bakfra har vi $a_1=\frac{180\,000}{1{,}06^{29}}$, $k=1{,}06$ og $n=25$. Det gir summen $\frac{180\,000}{1{,}06^{29}}\cdot\frac{1{,}06^{25}-1}{0{,}06}=\underline{\underline{1\,822\,610{,}77}}$ og dette er hva Kåre kan låne.

(b) Hvis vi bruker den årlige vekstfaktoren $e^{0{,}06}$ i stedet for 1,06 blir nåverdien av betalingsstrømmen summen

$$\frac{180\,000}{(e^{0{,}06})^5}+\frac{180\,000}{(e^{0{,}06})^6}+\cdots+\frac{180\,000}{(e^{0{,}06})^{28}}+\frac{180\,000}{(e^{0{,}06})^{29}}$$

Dette er en geometrisk rekke begge veier. Hvis vi summerer bakfra har vi $a_1=\frac{180\,000}{(e^{0{,}06})^{29}}$, $k=e^{0{,}06}$ og $n=25$. Det gir summen $\frac{180\,000}{e^{0{,}06\cdot 29}}\cdot\frac{e^{0{,}06\cdot 25}-1}{e^{0{,}06}-1}=\frac{180\,000}{e^{1{,}74}}\cdot\frac{e^{1{,}5}-1}{e^{0{,}06}-1}=\underline{\underline{1\,778\,872{,}67}}$ og dette er hva Kåre kan låne.

(c) Med flytende forrentning blir den effektive renten $e^{0{,}06}-1=6{,}18\%$ som er litt mer enn 6%. Dermed blir lånebeløpet (= nåverdien) som kan betjenes med de samme årlige innbetalingene litt lavere, noe som stemmer med svarene i (a) og (b).

Karakterskala på innlevering 1

For å få en idé om hvor god besvarelsen din er kan du sette poeng på hver deloppgave: 0,1,2,3. En godt begrunnet besvarelse med riktig teori og riktig utregning gir 3 poeng. Selv med en uviktig regnefeil kan du få 3, særlig hvis det er en litt vanskeligere oppgave. En hovedsakelig korrekt besvarelse, f. eks. en godt begrunnet besvarelse med en eller to regnefeil kan gi 2 poeng. En besvarelse som viser innsikt i den kunnskapen oppgaven tester, men ikke kommer i mål kan gi 1 poeng. En blank besvarelse eller en besvarelse med lite relevans for den kunnskapen oppgaven tester gir 0 poeng. I denne innleveringen er det 17 deloppgaver (1a, 1b, osv, alle med samme vekt slik at maks er 51). Med utgangspunkt i noen vanlige prosentgrenser får vi karaktergrensene:

Prosent	38	46	58	77	90
Skår	19	23	30	39	46
Karakter	E	D	C	B	A