MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2018
Runar Ile

Innlevering 2 – Løsningsforslag

NB: Det finnes alternative løsninger på mange av oppgavene som kan være (minst) like gode som de jeg har valgt her.

Oppgave 1

(a) Sentrum i ellipsen finner vi som skjæringspunktet mellom symmetrilinjene $x = 2$ og $y = -4$, dvs $\underline{\underline{(2, -4)}}$. Vi leser av horisontal halvakse: $\underline{\underline{10}}$, vertikal halvakse: $\underline{\underline{8}}$. Standardform for likningen til ellipsen er dermed $\underline{\underline{\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y+4)^2}{64} = 1}}$.

(b) Vi leser av vertikal asymptote: linjen $x = -2$, horisontal asymptote: linjen $y = 10$. Standardform til funksjonsuttrykket for hyperbelen er da $f(x) = 10 + \frac{a}{x+2}$. Vi bestemmer a ved å sette inn et punkt på grafen. Her er $(-3, 10{,}5)$ et tydelig punkt. Det gir en likning for a: $10 + \frac{a}{-3+2} = 10{,}5$ som har løsning $a = -0{,}5$ og dermed $f(x) = \underline{\underline{10 - \frac{0{,}5}{x+2}}}$

Oppgave 2

(a) Vi deriverer begge sidene av likningen ved å bruke potensregelen flere ganger og kjerneregelen på y^2 [vi tenker at y er en funksjon av x lokalt på kurven, dvs $y = y(x)$, men vi trenger ikke noe uttrykk for $y(x)$]. Da får vi $128x + 200y \cdot y' - 256 + 800y' = 0$ som gir likningen $200(y+4)y' = 128(2-x)$ dvs $\underline{\underline{y' = 0{,}64 \cdot \frac{2-x}{y+4}}}$

(b) Med $x = 8$ får vi likningen $64^2 + 100y^2 - 256 \cdot 8 + 800y = 4544$, dvs $y^2 + 8y = 24{,}96$. Vi fullfører kvadratet: $(y+4)^2 = 24{,}96 + 16 = 40{,}96$. Det gir $y = -4 \pm 6{,}4$, dvs $y = -10{,}4$ eller $y = 2{,}4$ som gir punktene $\underline{\underline{P = (8,\ -10{,}4)}}$ og $\underline{\underline{Q = (8,\ 2{,}4)}}$

(c) For P: Vi setter inn i uttrykket for y' fra (a): $y' = 0{,}64 \cdot \frac{2-8}{-10{,}4+4} = 0{,}6$. Ettpunktsformelen gir $p(x) - (-10{,}4) = 0{,}6(x-8)$, dvs $\underline{\underline{p(x) = 0{,}6x - 15{,}2}}$ (eksakt svar)

For Q: $y' = 0{,}64 \cdot \frac{2-8}{2{,}4+4} = -0{,}6$. Ettpunktsformelen gir $q(x) - 2{,}4 = -0{,}6(x-8)$, dvs $\underline{\underline{q(x) = -0{,}6x + 7{,}2}}$ (eksakt svar)

NB: Kurven er gitt i oppgave 1a, men dette trenger du ikke å vite for å løse oppgave 2.

Oppgave 3

(a) For å finne uttrykket for den omvendte funksjonen setter vi $y = 2x + 5$ og løser likningen for x. Det gir $x = 0{,}5y - 2{,}5$. Så skifter vi variabel til x og får $\underline{\underline{g(x) = 0{,}5x - 2{,}5}}$ som uttrykket for den omvendte funksjonen. Som alltid med omvendte funksjoner er $D_g = V_f$. For å finne verdimengden for $f(x)$ ser vi at $f(x)$ er en voksende (og lineær) funksjon med minste verdi $f(3) = 11$ og som oppnår alle større verdier når x vokser, dvs $V_f = [11, \infty\rangle$ og dermed $\underline{\underline{D_g = [11, \infty\rangle}}$

(b) Løser likningen $y = 10 + \frac{1}{x-2}$ for x. Det gir $x = 2 + \frac{1}{y-10}$. Skifter variabel og får at $\underline{\underline{g(x) = 2 + \frac{1}{x-10}}}$ som uttrykket for den omvendte funksjonen. $f(x)$ er en hyperbel med vertikal asymptote linjen $x = 2$, som er strengt avtagende for $x > 2$, og som har horisontal asymptote linjen $y = 10$. Dermed er $V_f = \langle 10, \infty\rangle$ og $\underline{\underline{D_g = \langle 10, \infty\rangle}}$

(c) Løser likningen $y = (x-5)^3 + 2$ for x og får $x = 5 + (y-2)^{\frac{1}{3}}$. Dermed er $\underline{\underline{g(x) = 5 + (x-2)^{\frac{1}{3}}}}$ uttrykket for for den omvendte funksjonen. Fordi $y = f(x)$ blir så negativ du vil ved å velge store negative x, og $y = f(x)$ blir så positiv du vil ved å velge store positive x, er $V_f = \mathbb{R}$. Altså er $\underline{\underline{D_g = \mathbb{R}}}$

(d) Vi tenker at $f(x)$ består av to forskjellige funksjoner med hvert sitt definisjonsområde og gjør som i (a-c) for hver av dem. Det gir $\underline{\underline{g(x) = \begin{cases} \frac{18}{x} & \text{hvis } x \geqslant 3 \\ 24 - 6x & \text{hvis } -\frac{21}{6} \leqslant x < 3 \end{cases}}}$

Oppgave 4

(a) La r være den årlige nominelle renten. Den årlige vekstfaktoren er da e^r og vi får likningen $50\,000 \cdot e^{5r} = 150\,000$ som gir likningen $e^{5r} = 3$. Setter vs og hs inn i $\ln(x)$ og får likningen $5r = \ln(3)$ som gir løsningen $\underline{\underline{r = \frac{\ln 3}{5} = 7{,}32\%}}$

(b) La r være den årlige nominelle renten. Nåverdien til 9 millioner er da (i millioner) $\frac{9}{e^{6r}}$ som skal være 5 millioner. Vi får altså likningen $\frac{9}{e^{6r}} = 5$, dvs $e^{6r} = \frac{9}{5}$. Setter vs og hs inn i $\ln(x)$ og får $6r = \ln(\frac{9}{5}) = \ln(9) - \ln(5)$, dvs $\underline{\underline{r = \frac{\ln 9 - \ln 5}{6} = 9{,}80\%}}$

(c) Vi setter $x =$ antall år pengene må stå på konto. Da får vi likningen $500\,000 \cdot e^{0{,}039x} = 1\,200\,000$, dvs $e^{0{,}039x} = \frac{12}{5}$. Vi setter vs og hs inn i $\ln(x)$. Vi får at pengene må stå i $\underline{\underline{x = \frac{\ln 12 - \ln 5}{0{,}039} = 22{,}45 \text{ år}}}$

(d) Vi setter $x =$ tiden mellom investering og utbetaling (i år). Den årlige vekstfaktoren er 1,1 og dermed får vi likningen $45 \cdot 1{,}1^x = 70$, dvs $1{,}1^x = \frac{70}{45}$. Vi setter inn vs og hs i e^x og får $x \cdot \ln(1{,}1) = \ln 70 - \ln 45$. Dermed må utbetaling skje $\underline{\underline{\frac{\ln 70 - \ln 45}{\ln(1{,}1)} = 4{,}64 \text{ år}}}$ etter investeringen.

Oppgave 5

(a) Vi setter vs og hs av ulikheten $e^x \leqslant \frac{10}{3}$ inn i $\ln(x)$ og får $\underline{\underline{x \leqslant \ln(10) - \ln(3)}}$

(b) Vi setter vs og hs inn i e^x og får ulikheten $x - 7 > e^5$ som gir $\underline{\underline{x > 7 + e^5}}$

(c) Vi setter vs og hs inn i e^x og får ulikheten $\frac{2x+5}{x-3} < 1$, dvs $\frac{2x+5}{x-3} - 1 < 0$, dvs $\frac{x+8}{x-3} < 0$. Nå kan vi bruke fortegnsskjema og få løsningen $\underline{\underline{x \text{ i } \langle -\infty, -8\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle}}$

(d) Her kan vi sette $u = e^x$ og løse ulikheten $\frac{u}{u-3} < -2$, dvs $\frac{u}{u-3} + 2 < 0$, dvs $\frac{3(u-2)}{u-3} < 0$. Nå kan vi bruke fortegnsskjema og få $e^x = u$ i $\langle 2, 3\rangle$, dvs $\underline{\underline{x \text{ i } \langle \ln(2), \ln(3)\rangle}}$.

Oppgave 6

(a) Vi bruker kjerneregelen med $u(x) = x^2 - 10x + 30$, $g(u) = 5 - \ln(u)$, $u'(x) = 2x - 10 = 2(x-5)$, $g'(u) = -\frac{1}{u}$ som gir $f'(x) = -\frac{2(x-5)}{x^2-10x+30}$. Fordi $x = 5$ ikke er en rot i nevneren kan ikke brøken forkortes. Så løser vi likningen $f'(x) = 0$, dvs $2(x-5) = 0$, dvs $\underline{x = 5}$ er eneste stasjonære punkt. Vi fullfører kvadratet $x^2 - 10x + 30 = (x-5)^2 + 5$ som alltid er større enn eller lik 5. Dermed ser vi at $f'(x)$ er større enn 0 for $x < 5$ og $f'(x)$ er mindre enn 0 for $x > 5$. Altså er $f(x)$ $\underline{\underline{\text{strengt voksende i intervallet } \langle -\infty, 5]}}$ og $\underline{\underline{\text{strengt avtagende i intervallet } [5, \infty\rangle}}$ og $\underline{\underline{x = 5 \text{ er et globalt maksimumspunkt}}}$.

(b) Vi bruker kjerneregelen med $u(x) = x^3 - 12x$, $g(u) = 3e^u$, $u'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4)$ og $g'(u) = 3e^u$ som gir $f'(x) = 3(x^2-4)e^{x^3-12x}$. Så løser vi likningen $f'(x) = 0$, dvs $3(x^2-4)e^{x^3-12x} = 0$. Vi har $3e^u > 0$ og får dermed likningen $x^2 - 4 = 0$, dvs at $\underline{\underline{x = \pm 2}}$ er de stasjonære punktene til $f(x)$. Vi får også faktoriseringen $f'(x) = 3(x+2)(x-2)e^{x^3-12x}$. Vi ser da (f. eks. ved å bruke fortegnsskjema) at $f'(x)$ er negativ for x i $\langle -2, 2\rangle$ og positiv for x i $\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$. Altså er $f(x)$ strengt voksende i intervallet $\underline{\underline{\langle -\infty, -2]}}$ og i intervallet $\underline{\underline{[2, \infty\rangle}}$, og strengt avtagende i intervallet $\underline{\underline{[-2, 2]}}$. Altså er $\underline{\underline{x = -2 \text{ et lokalt maksimumspunkt}}}$ og $\underline{\underline{x = 2 \text{ et lokalt minimumspunkt}}}$.

Oppgave 7 Vi bruker kjerneregelen med $u(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}8x - 12 = -0{,}01(x^2 - 80x + 1200) = -0{,}01(x-20)(x-60)$, $g(u) = \ln(u)$, $u'(x) = -0{,}02x + 0{,}8 = -0{,}02(x-40)$, $g'(u) = \frac{1}{u}$. Så $f'(x) = \frac{-0{,}02(x-40)}{-0{,}01(x-20)(x-60)} = \frac{2(x-40)}{(x-20)(x-60)}$. Likningen $f'(x) = 0$ tilsvarer likningen $2(x-40) = 0$ og dermed er $\underline{\underline{x = 40 \text{ eneste stasjonære punkt}}}$ for $f(x)$. Ved å bruke fortegnsskjema ser vi at $f'(x)$ er positiv for $20 < x < 40$ og negativ for $40 < x < 60$. Altså er $f(x)$ strengt voksende i intervallet $\langle 20, 40]$ og strengt avtagende i intervallet

$[40, 60\rangle$. Dermed er $\underline{\underline{x = 40}}$ et lokalt (og globalt) maksimumspunkt. For å bestemme funksjonens krumning finner vi $f''(x)$. Vi bruker brøkregelen og får $f''(x) = \frac{-2(x^2-80+2000)}{(x-20)^2(x-60)^2}$. Ved å fullføre kvadratet får vi $x^2 - 80 + 2000 = (x-40)^2 + 400$ som er større enn eller lik 400 for alle x. Altså har vi at $f''(x)$ er negativ i hele intervallet $\langle 20, 60\rangle$ og dermed er $f(x)$ konkav i hele definisjonsområdet. Da kan vi konkludere med at det stasjonære punktet $x = 40$ er et globalt maksimumspunkt og maksimum er $\underline{\underline{f(40) = 2\ln(2)}}$.

Karakterskala på innlevering 2

For å få en idé om hvor god besvarelsen din er kan du sette poeng på hver deloppgave: 0,1,2,3. En godt begrunnet besvarelse med riktig teori og riktig utregning gir 3 poeng. Selv med en uviktig regnefeil kan du få 3, særlig hvis det er en litt vanskeligere oppgave. En hovedsakelig korrekt besvarelse, f. eks. en godt begrunnet besvarelse med en eller to regnefeil kan gi 2 poeng. En besvarelse som viser innsikt i den kunnskapen oppgaven tester, men ikke kommer i mål kan gi 1 poeng. En blank besvarelse eller en besvarelse med lite relevans for den kunnskapen oppgaven tester gir 0 poeng. I denne innleveringen er det 20 deloppgaver (1a, 1b, osv) alle med samme vekt slik at maks er 60. Med utgangspunkt i noen vanlige prosentgrenser får vi karaktergrensene:

Prosent	38	46	58	77	90
Skår	23	28	35	46	54
Karakter	E	D	C	B	A