MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2018
Oppgaver

Forelesning 12

Kap 4.3, 4.6: Derivasjonsregler. Funksjonsdrøfting med maks/min-problemer.

[L] 4.3.1-13
[L] 4.6.1-6

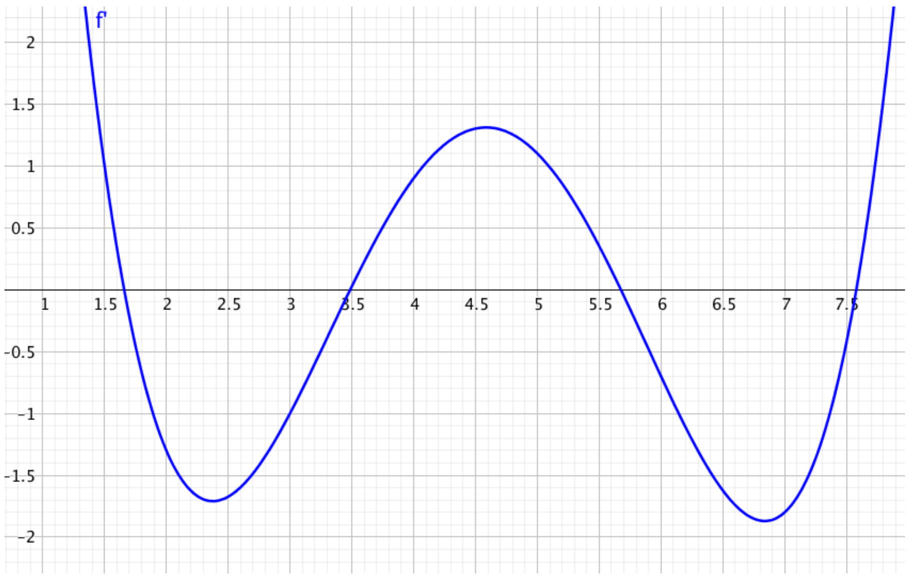
Midtveiseksamen 2015h oppg 12 og 13
Midtveiseksamen 2016v oppg 14
Midtveiseksamen 2017v oppg 10 og 15
Midtveiseksamen 2018v oppg 15

Oppgaver for veiledningstimene
torsdag 1/11 kl 14-16 i D1-080

Oppgave 1 Tegn en grov skisse av grafene til to forskjellige funksjoner $f(x)$ med de oppgitte dataene. NB: Du skal ikke finne noe funksjonsuttrykk!

(a) $f'(x)$ er negativ for $x < 5$ og positiv for $x > 5$
(b) $f'(x)$ er positiv for $x < 10$, negativ for $10 < x < 15$ og positiv for $x > 15$
(c) $f'(x)$ er negativ for $x < 5$, $f'(5) = 0$, $f'(x)$ er negativ for $5 < x < 12$ og $f'(x)$ er positiv for $x > 12$

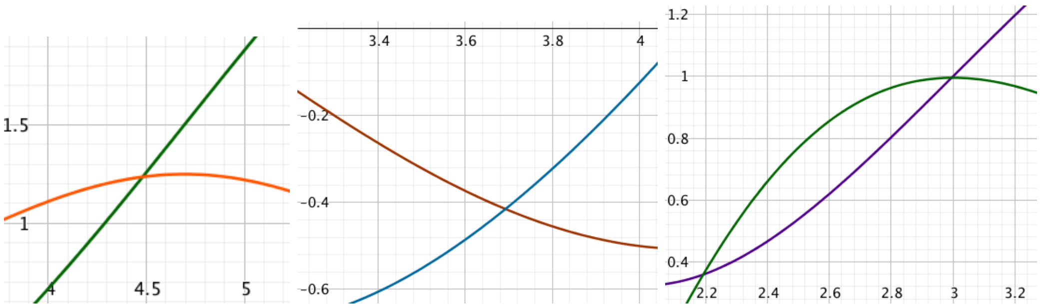
Oppgave 2 I figur 1 ser du grafen til $f'(x)$. Avgjør hvilke utsagn som er sanne.



Figur 1: Grafen til $f'(x)$

(a) $f'(2) < f'(3)$ (b) $f(2) < f(3)$ (c) $f(4{,}5) > f(5)$
(d) $f(x)$ har et (lokalt) maksimum for $x = 3{,}5$ (e) $f(x)$ har et (lokalt) minimum for $2 < x < 3$
(f) grafen til $f(x)$ har ingen bunnpunkter (g) $f(x)$ avtar i intervallet $[6, 7]$
(h) $f(x)$ er vokser raskere rundt $x = 1{,}5$ enn rundt $x = 5{,}5$
(i) Den deriverte funksjonen til $f'(x)$ er positiv for $x = 7{,}6$ (j) $f(4{,}5) > f(5)$
(k) Vi kan ikke bruke grafen til $f'(x)$ for å avgjøre om $f(4{,}5)$ er positiv

Oppgave 3 I figur 2 ser du grafen til $f(x)$ og $f'(x)$ i samme koordinatsystem (a-c). Avgjør hvilken som er grafen til $f(x)$ og hvilken som er grafen til $f'(x)$.



Figur 2: (a-c): Grafene til $f(x)$ og til $f'(x)$

Oppgave 4 Avgjør hvor $f(x)$ har stasjonære punkter, hvor $f(x)$ er strengt avtagende/voksende og finn eventuelle (lokale) maksimums- og minimumspunkter.

(a) $f'(x) = 4(x+1)(x-2)(x-5)$ (b) $f'(x) = (x-20)e^x$ (c) $f'(x) = \dfrac{(3x-5)(10-2x)}{x^2-6x+10}$

(d) $f'(x) = \ln(x) - 1{,}12$ (e) $f'(x) = \ln(x^2-6x+10)$

(f) $f'(x) = \ln(x^2-8)$, $(x > 2{,}9)$ (g) $f'(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$ (h) $f'(x) = e^{x^2-3} - 2$

Oppgave 5 Bestem maksimum og minimum for disse funksjonene.
(a) $f(x) = 2x^3 - 33x^2 + 168x + 9$ med $D_f = [2{,}5\,,\,8{,}6]$
(b) $f(x) = xe^{6x-x^2}$ med $D_f = [1\,,\,5]$
(c) $f(x) = \ln(1+e^{-x})$ med $D_f = [4\,,\,5]$

Oppgave 6
(a) Vi har $f(x) = \sqrt{\ln[(x-4)^2]+5} + x^3 - 4x$. Beregn $\frac{f(6)-f(2)}{4}$ og forklar hvorfor det finnes et tall c med $2 < c < 6$ slik at $f'(c) = 46$.
(b) Vi har en deriverbar funksjon $f(x)$ med $f(13) = 600e^{1{,}14} = f(17)$. Forklar hvorfor $f(x)$ har et stasjonært punkt mellom 13 og 17.

Oppgave 7 Beregn uttrykket for den deriverte funksjonen til $f(x)$.
(a) $f(x) = \ln(x^2-7x+13)$ (b) $f(x) = e^{0{,}035x^2}$ (c) $f(x) = \sqrt{e^{2x}+4x+5}$ (d) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1-x)}$

Oppgave 8 (Midtveiseksamen 2016v, oppg 12)
Vi betrakter funksjonen gitt ved $f(x) = \ln(x^2+4x+5)$. Hvilket utsagn er sant?
(a) Funksjonen f er voksende på $[2,\infty\rangle$
(b) Funksjonen f er voksende på $[-2,\infty\rangle$
(c) Funksjonen f er voksende på $\langle-\infty,2]$
(d) Funksjonen f er voksende på $\langle-\infty,-2]$
(e) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 9 (Midtveiseksamen 2016h, oppg 10)
Vi betrakter funksjonen gitt ved $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$. Hvilket utsagn er sant?
(a) Funksjonen f har ingen lokale minimumspunkter
(b) Funksjonen f har ett lokalt minimumspunkt, og det er $x = -3$
(c) Funksjonen f har ett lokalt minimumspunkt, og det er $x = 1$
(d) Funksjonen f har flere lokale minimumspunkter
(e) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

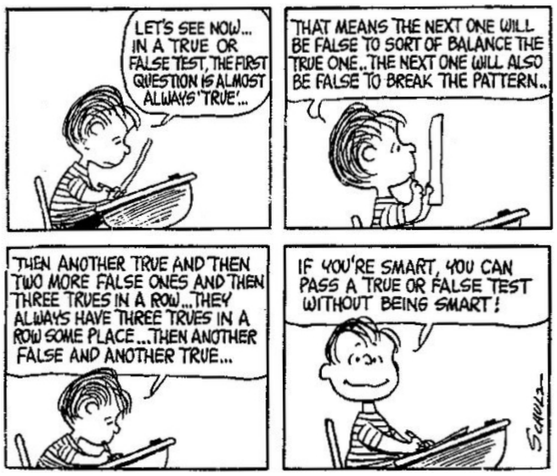
Oppgave 10 (Midtveiseksamen 2018h, oppg 10)
Vi betrakter funksjonen gitt ved $f(x) = x^2e^{1-x}$. Hvilket utsagn er sant?
(a) Funksjonen f har ett lokalt maksimumspunkt $x = a$ med $a > 0$
(b) Funksjonen f har flere lokale maksimumspunkter
(c) Funksjonen f har ett lokalet maksimumspunkt $x = 0$
(d) Funksjonen f har ett lokalet maksimumspunkt $x = a$ med $a < 0$
(e) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Fasit

Oppgave 1

Sammenlign med andre studenter, spør studentveilederne!

Oppgave 2



Figur 3: True or false

Oppgave 3

(a) $f(x)$: Grønn (b) $f(x)$: Brun (c) $f(x)$: Fiolett

Oppgave 4

(a) Stasjonære punkter: $x = -1$, $x = 2$, $x = 5$. $f(x)$ er strengt avtagende for $x \leqslant -1$, $f(x)$ er strengt voksende for $-1 \leqslant x \leqslant 2$, $f(x)$ er strengt avtagende for $2 \leqslant x \leqslant 5$, $f(x)$ er strengt voksende for $x \geqslant 5$. Dermed er $x = -1$ et lokalt minimumspunkt, $x = 2$ et lokalt maksimumspunkt og $x = 5$ et lokalt minimumspunkt.

(b) Stasjonære punkter: Bare $x = 20$. $f(x)$ er strengt avtagende for $x \leqslant 20$ og $f(x)$ er strengt voksende for $x \geqslant 20$. Dermed er $x = 20$ et globalt minimumspunkt.

(c) Stasjonære punkter: $x = \frac{5}{3}$ og $x = 5$. $f(x)$ er strengt avtagende for $x \leqslant \frac{5}{3}$, $f(x)$ er strengt voksende for $\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 5$, $f(x)$ er strengt avtagende for $x \geqslant 5$. Dermed er $x = \frac{5}{3}$ et lokalt minimumspunkt og $x = 5$ et lokalt maksimumspunkt.

(d) Stasjonære punkter: Bare $x = e^{1,12}$. $f(x)$ er strengt avtagende for $x \leqslant e^{1,12}$ og $f(x)$ er strengt voksende for $x \geqslant e^{1,12}$. Dermed er $x = e^{1,12}$ et globalt minimumspunkt.

(e) Stasjonære punkter: Bare $x = 3$. $f(x)$ er strengt voksende for alle x. Dermed er $x = 3$ hverken et lokalt minimumspunkt eller et lokalt maksimumspunkt (et *terrassepunkt*).

(f) Stasjonære punkter: Bare $x = 3$. $f(x)$ er strengt avtagende for $2{,}9 \leqslant x \leqslant 3$, $f(x)$ er strengt voksende for $x \geqslant 3$. Dermed er $x = 3$ et globalt minimumspunkt.

(g) $f'(x) = (e^x - 1)(e^x - 3)$. Stasjonære punkter: $x = 0$ og $x = \ln(3)$. $f(x)$ er strengt voksende for $x \leqslant 0$, $f(x)$ er strengt avtagende for $0 \leqslant x \leqslant \ln(3)$ og $f(x)$ er strengt voksende for $x \geqslant \ln(3)$. Dermed er $x = 0$ et lokalt maksimumspunkt og $x = \ln(3)$ et lokalt minimumspunkt.

(h) Stasjonære punkter: $x = \pm\sqrt{3 + \ln(2)}$. $f(x)$ er strengt voksende for $x \leqslant \sqrt{3 + \ln(2)}$, $f(x)$ er strengt avtagende for $-\sqrt{3 + \ln(2)} \leqslant x \leqslant \sqrt{3 + \ln(2)}$ og $f(x)$ er strengt voksende for $x \geqslant \sqrt{3 + \ln(2)}$. Dermed er $x = -\sqrt{3 + \ln(2)}$ et lokalt maksimumspunkt og $x = \sqrt{3 + \ln(2)}$ et lokalt minimumspunkt.

Oppgave 5 Her bruker vi ekstremverdisetningen (s. 170).

(a) min: $f(7) = 254 = f(3{,}5)$ maks: $f(8{,}6) = 285{,}23$

(b) min: $f(1) = 148{,}41$ maks: $f(3) = 24309{,}25$

(c) min: $f(5) = 0{,}00672$ maks: $f(4) = 0{,}01815$

Oppgave 6

(a) $\frac{f(6)-f(2)}{4} = 46$. Fordi $f(x)$ er deriverbar for alle x gir middelverdisetningen (s. 166) at det finnes et tall c med $2 < c < 6$ slik at $f'(c) = 46$.

(b) Fra middelverdisetningen følger det at det finnes et tall c i intervallet $\langle 13\,,17\rangle$ slik at $f'(c)=0$ og da er $x=c$ et stasjonært punkt.

Oppgave 7 Beregn uttrykket for den deriverte funksjonen til $f(x)$.

(a) $f'(x)=\dfrac{2x-7}{x^2-7x+13}$

(b) $f'(x)=0{,}07xe^{0{,}035x^2}$

(c) $f'(x)=\dfrac{2(e^{2x}+2)}{2\sqrt{e^{2x}+4x+5}}$

(d) $f(x)=\dfrac{(1-x)\ln(1-x)+x}{[\ln(1-x)]^2}$

Oppgave 8
b

Oppgave 9
c

Oppgave 10
a