MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2018
Oppgaver

Forelesning 14
Kap 4.8-9: l'Hôpitals regel. Grenseinntekt og -kostnad. Elastisitet.

[L] 4.8.1-2
[L] 4.9.1-8

Midtveiseksamen 2015h oppg 11 og 15
Midtveiseksamen 2016v oppg 13
Midtveiseksamen 2016h oppg 12 og 14
Midtveiseksamen 2017v oppg 12
Midtveiseksamen 2018v oppg 12

Oppgaver for veiledningstimene
torsdag 15/11 kl 14-16 i D1-080

Oppgave 1 Beregn grenseverdiene.

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{-x}{25(x-1)}$ (b) $\lim_{x\to \ln 5} \frac{e^x-5}{x^2-5}$ (c) $\lim_{x\to \ln 5} \frac{e^x-5}{x^2-(\ln 5)^2}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{7x}{e^x-1}$ (e) $\lim_{x\to 0} \frac{x^{10}}{e^x-1}$ (f) $\lim_{x\to 1} \frac{x\ln(x)}{x^2-1}$

(g) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{e^{2x}-e^2}$ (h) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1}$ (i) $\lim_{x\to 2} \frac{e^{x^2-3x+2}}{x^2-4}$

Oppgave 2 Beregn grenseverdiene ved å bruke l'Hôpitals regel.

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{-x}{25(x-1)}$ (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+10}{e^x-5}$ (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}$

Oppgave 3 Forklar hvorfor $K(x)$ er en kostnadsfunksjonen ved å sjekke de tre kriteriene:
(1) $K(0) > 0$
(2) $K(x)$ er en voksende funksjon
(3) $K(x)$ er en konveks funksjon
Bestem også konstandsoptimum og hva enhetsprisen er ved kostnadsoptimum.

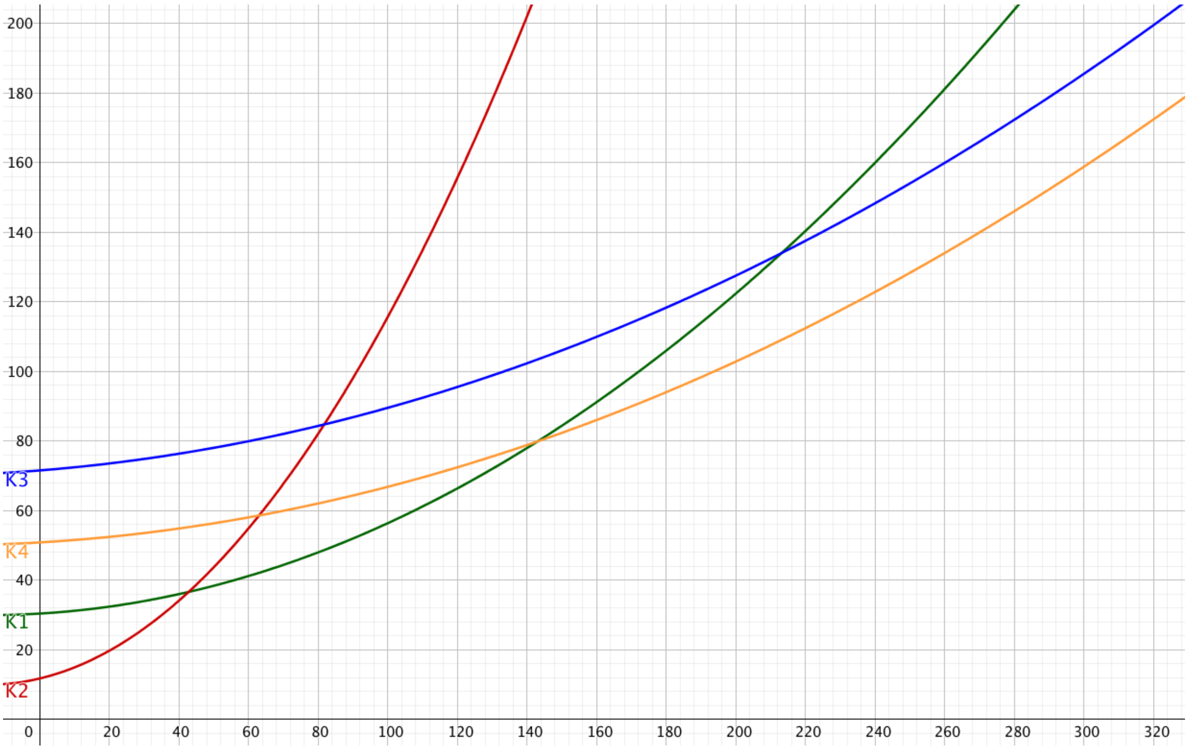
(a) $K(x) = 0{,}01x^2 + 8x + 2500,\ x \geqslant 0$ (b) $K(x) = 0{,}05(x+200)^2,\ x \geqslant 0$

(c) $K(x) = 400e^{0{,}001x^2},\ x \geqslant 0$ (d) $K(x) = 1000e^{0{,}0004(x+5)^2},\ x \geqslant 0$

(e) $K(x) = 50x + 1000,\ 0 \leqslant x \leqslant 1000$

Oppgave 4 $K(x)$ er kostnadsfunksjonen, $I(x)$ er inntektsfunksjonen og x er antall produserte og solgte enheter. Finn profittmaksimerende kvantum.
(a) $K(x) = 0{,}01x^2 + 8x + 2500$ og $I(x) = 100x$ for $x \geqslant 0$
(b) $K(x) = 0{,}005x^2 + 20x + 30000$ og $I(x) = 50x$ for $0 \leqslant x \leqslant 2000$

Oppgave 5 I figur 1 ser du grafen til fire forskjellige kostnadsfunksjoner.
(a) Lage en rekkefølge av kostnadsfunksjonene fra den med minste optimale enhetskostnad til den med største optimale enhetskostnad.
(b) Finn en tilnærmet verdi for kostnadsoptimum for hver av kostnadsfunksjonene.
(c) Finn en tilnærmet verdi for optimal enhetskostnad for hver av kostnadsfunksjonene.



Figur 1: Fire kostnadsfunksjoner (K_1-K_4)

Oppgave 6 La p være prisen på en vare og $D(p)$ etterspørselen (= antall solgte enheter). Bestem den relative prisendringen, den relative etterspørselsendringen og priselastisiteten. Avgjør om etterpørselen er elastisk, uelastisk eller nøytralelastisk.

(a) $D(30) = 40$ og $D(30{,}5) = 39$

(b) $D(20) = 101$ og $D(21) = 100{,}95$

(c) $D(10) = 24{,}648$ og $D(10{,}01) = 24{,}623$

Oppgave 7 La p være prisen på en vare og $D(p)$ etterspørselen (= antall solgte enheter). Beregn den momentane priselastisiteten $\varepsilon(p) = \mathrm{El}_p(D(p))$. Bestem prisen p slik at etterpørselen er elastisk, uelastisk og nøytralelastisk.

(a) $D(p) = 100 - 2p$ med $0 < p < 50$

(b) $D(p) = 100 + \frac{20}{p}$ med $p > 1$

(c) $D(p) = 67e^{-0.1p}$ med $p > 0$

Fasit

Oppgave 1 Beregn grenseverdiene.

(a) $\dfrac{-3}{25(3-1)} = -0{,}06$ (b) 0 (c) $\dfrac{5}{2\ln 5}$

(d) 7 (e) 0 (f) $0{,}5$

(g) $\dfrac{1}{2e^2}$ (h) 2 (i) $\dfrac{1}{4}$

Oppgave 2 Beregn grenseverdiene ved å bruke l'Hôpitals regel.

(a) $\dfrac{-1}{25}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$ (c) 0

Oppgave 3

(a) $K(0) = 2500 > 0$, $K'(x) = 0{,}02x + 8 > 0$ for $x > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geqslant 0$, $K''(x) = 0{,}02 > 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geqslant 0$. Kostnadsoptimum $x = 500$ gir minimal enhetspris $A(500) = 2$

(b) $K(0) = 2000 > 0$, $K'(x) = 0{,}1x + 20 > 0$ for $x > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geqslant 0$, $K''(x) = 0{,}1 > 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geqslant 0$. Kostnadsoptimum $x = 200$ gir minimal enhetspris $A(200) = 40$

(c) $K(0) = 400 > 0$, $K'(x) = 0{,}8xe^{0{,}001x^2} > 0$ for $x > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geqslant 0$, $K''(x) = 0{,}8(1 + 0{,}002x^2)e^{0{,}001x^2} > 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geqslant 0$. Kostnadsoptimum $x = 22{,}36$ gir minimal enhetspris $A(22{,}36) = 29{,}49$

(d) $K(0) = 1010{,}05 > 0$, $K'(x) = 0{,}8(x + 5)e^{0{,}0004(x+5)^2} > 0$ for $x > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geqslant 0$, $K''(x) = 0{,}8[1 + 0{,}0008(x + 5)^2]e^{0{,}0004(x+5)^2} > 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geqslant 0$. Kostnadsoptimum $x = 32{,}94$ gir minimal enhetspris $A(32{,}94) = 53{,}00$

(e) $K(0) = 1000 > 0$, $K'(x) = 50 > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geqslant 0$, $K''(x) = 0 \geqslant 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geqslant 0$. Kostnadsoptimum $x = 1000$ gir minimal enhetspris $A(1000) = 51$

Oppgave 4

(a) For $x = 460$ er grensekostnad lik grenseinntekt og $\pi''(x) = -0{,}02 < 0$ gir at profittfunksjonen er konkav og dermed er $x = 460$ et profittmaksimerende kvantum.

(b) For $x = 3000$ er grensekostnad lik grenseinntekt, men dette ligger utenfor gyldighetsområdet (definisjonsområdet) for modellen. Vi ser at $\pi'(x) = 30 - 0{,}01x$ er positiv for $x < 3000$ som gir at profittfunksjonen er voksende for x i intervallet $[0, 2000]$ og dermed er $x = 2000$ et profittmaksimerende kvantum.

Oppgave 5

(a) K_4, K_1, K_3, K_2

(b) $K_4: \ x = 220,\ \ K_1: \ x = 120,\ \ K_3: \ x = 270,\ \ K_2: 40$

(c) $A_4(220) = \frac{112}{220} = 0{,}51,\ \ A_1(120) = \frac{65}{120} = 0{,}54,\ \ A_3(270) = \frac{165}{270} = 0{,}61,\ \ A_2(40) = \frac{35}{40} = 0{,}88$

Oppgave 6

(a) relativ prisendring er $\frac{0{,}5}{30}$, relativ etterspørselsendring er $\frac{-1}{40}$ og priselastisiteten er $-1{,}5$, dvs elastisk

(b) relativ prisendring er $\frac{1}{20}$, relativ etterspørselsendring er $\frac{-0{,}05}{101}$ og priselastisiteten er $-0{,}0099$, dvs uelastisk

(c) relativ prisendring er $-0{,}001014$, relativ etterspørselsendring er $0{,}001$ og priselastisiteten er $-1{,}014$, dvs elastisk

Oppgave 7

(a) $\varepsilon(p) = \frac{4p-100}{2p-100}$. Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for $p = 25$, uelastisk for $0 < p < 25$ og elastisk for $25 < p < 50$.

(b) $\varepsilon(p) = -\frac{1}{5p+1}$. Etterspørselsfunksjonen er uelastisk for alle $p > 1$.

(c) $\varepsilon(p) = -0{,}1p$. Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for $p = 10$, elastisk for $0 < p < 10$ og uelastisk for $p > 10$.

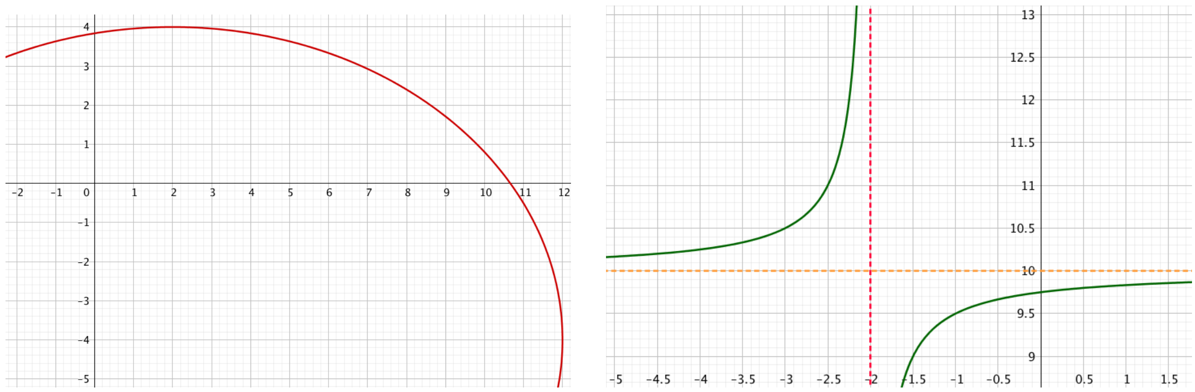
Innleveringsoppgaver

Frivillig. Leveres på papir (gjerne håndskrevet) i kasse utenfor min kontordør (B4-023) innen mandag 19/11 kl 14. Besvarelsen rettes og leveres tilbake på veiledningen torsdag 22/11. Det vil også komme et løsningsforslag til oppgavene.

Oppgave 1

(a) Finn likningen til ellipsen i figur 2. Bestem også sentrum og halvaksene til ellipsen.

(b) Finn funksjonsuttrykket til hyperbelen i figur 2 (med asymptoter inntegnet). Bestem også likningene til asymptotene til hyperbelen.



Figur 2: En ellipse og en hyperbel

Oppgave 2

(a) En kurve er gitt som løsningene på likningen $64x^2 + 100y^2 - 256x + 800y = 4544$. Bruk implisitt derivasjon til å uttrykke y' ved hjelp av y og x.

(b) Bestem punktene på kurven med $x = 8$.

(c) Finn tangentlikningene til punktene i (b).

Oppgave 3 Finn den omvendte funksjonen $g(x)$ og definisjonsmengden D_g til funksjonen $f(x)$ med definisjonsmengde D_f.

(a) $f(x) = 2x + 5$ med $D_f = [3, \infty\rangle$ (b) $f(x) = 10 + \frac{1}{x-2}$ med $D_f = \langle 2, \infty\rangle$

(c) $f(x) = (x-5)^3 + 2$ med $D_f = \mathbb{R}$ (alle reelle tall)

(d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{18}{x} & \text{hvis } 0 < x \leqslant 6 \\ 4 - \frac{x}{6} & \text{hvis } 6 < x \leqslant 45 \end{cases}$$

Oppgave 4 Finn eksakte og tilnærmede verdier i følgende oppgaver. Vi antar kontinuerlig forrentning.

(a) Du vil sette 50 000 inn på en konto. Finn den nominelle renten som gir saldo på 150 000 etter 15 år.

(b) Bestem den nominelle renten slik at nåverdien til 9 millioner om 6 år er 5 millioner.

(c) Du setter inn 500 000 på en konto med 3,9% nominell rente. Bestem hvor lenge pengene må stå før saldoen er 1 200 000.

(d) Du vurderer å investere 45 millioner i et prosjekt som lover en engangutbetaling på 70 millioner. Anta internrenten til denne betalingsstrømmen skal være 10%. Bestem når utbetalingen skal finne sted hvis avtalen er balansert (rettferdig).

Oppgave 5 Løs ulikhetene.

(a) $3e^x \leqslant 10$ (b) $\ln(x-7) > 5$ (c) $\ln \frac{2x+5}{x-3} < 0$ (d) $\frac{e^x}{e^x - 3} < -2$

Oppgave 6 Finn de stasjonære punktene til $f(x)$, bestem hvor $f(x)$ er strengt avtagende/voksende og finn eventuelle lokale og globale maksimums- og minimumspunkter.

(a) $f(x) = 5 - \ln(x^2 - 10x + 30)$ (b) $f(x) = e^{x^3 - 12x}$

Oppgave 7 Vi har funksjonen $f(x) = \ln(-0{,}01x^2 + 0{,}8x - 12)$ med definisjonsmengde $D_f = \langle 20, 60\rangle$. Bestem (lokale) minimumspunkter og maksimumspunkter. Forklar hvorfor de stasjonære punktene gir minimum/maksimum ved å bruke konveksitet/konkavitet av funksjonen. Beregn minimum/maksimum til funksjonen.