MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2018
Oppgaver

Forelesning 15
Kap 4.10: Taylorpolynomer

[L] 4.10.1-7

Repetisjon:

Midtveiseksamen 2015h oppg 11

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 22/11 kl 14-16 i D1-080

Oppgave 1
(a) Finn Taylorpolynomene $P_1(x),\ldots,P_4(x)$ av grad $1-4$ til funksjonen $f(x) = e^x$ i $x = 0$.
(b) Beregn $P_1(1),\ldots,P_4(1)$ og beregn hvor gode tilnærminger disse verdiene gir til $f(1) = e$.

Oppgave 2
(a) Finn Taylorpolynomene $P_1(x),\ldots,P_4(x)$ av grad $1-4$ til funksjonen $f(x) = xe^x$ i $x = 0$.
(b) Beregn $P_1(1),\ldots,P_4(1)$ og beregn hvor gode tilnærminger disse verdiene gir til $f(1) = e$.

Oppgave 3
(a) Finn Taylorpolynomene $P_1(x),\ldots,P_4(x)$ av grad $1-4$ til funksjonen $f(x) = \ln(x)$ i $x = 1$.
(b) Beregn $P_1(1),\ldots,P_4(1)$ og beregn hvor gode tilnærminger disse verdiene gir til $f(2) = \ln(2)$.

Oppgave 4
(a) Finn Taylorpolynomene $P_1(x),\ldots,P_4(x)$ av grad $1-4$ til funksjonen $f(x) = (x-1)\ln(x)$ i $x = 1$.
(b) Beregn $P_1(1),\ldots,P_4(1)$ og beregn hvor gode tilnærminger disse verdiene gir til $f(2) = \ln(2)$.

Oppgave 5
(a) Finn Taylorpolynomene $P_1(x),\ldots,P_4(x)$ av grad $1-4$ til funksjonen $f(x) = x^4$ i $x = 0$.
(b) Beregn $P_1(10),\ldots,P_4(10)$ og beregn hvor gode tilnærminger disse verdiene gir til $f(10) = 10\,000$.

Oppgave 6
(a) Finn Taylorpolynomene $P_1(x),\ldots,P_4(x)$ av grad $1-4$ til funksjonen $f(x) = x^5$ i $x = 0$.
(b) Beregn $P_1(10),\ldots,P_4(10)$ og beregn hvor gode tilnærminger disse verdiene gir til $f(10) = 100\,000$.

Oppgave 7
(a) Finn Taylorpolynomene $P_1(x),\ldots,P_4(x)$ av grad $1-4$ til funksjonen $f(x) = x^5$ i $x = 2$.
(b) Beregn $P_1(10),\ldots,P_4(10)$ og beregn hvor gode tilnærminger disse verdiene gir til $f(10) = 100\,000$.

Oppgave 8 La $P_1(x),\ldots,P_4(x)$ være Taylorpolynomene i oppgave 1. Beregn grenseverdiene.

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - P_1(x)}{x^2} \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - P_2(x)}{x^3} \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - P_3(x)}{x^4} \qquad \text{(d)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - P_4(x)}{x^5}$$

Oppgave 9 La $P_1(x),\ldots,P_4(x)$ være Taylorpolynomene i oppgave 3. Beregn grenseverdiene.

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x) - P_1(x)}{(x-1)^2} \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x) - P_2(x)}{(x-1)^3} \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x) - P_3(x)}{(x-1)^4} \qquad \text{(d)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x) - P_4(x)}{(x-1)^5}$$

Oppgave 10 (Midtveiseksamen 2017v, oppg 12)
Vi betrakter priselastisiteten $\varepsilon = \mathrm{El}_p D(p)$ for en vare med etterspørsel gitt ved $D(p) = 120 - 8p$
(a) $\varepsilon > -1$ for $p = 7{,}5$
(b) $\varepsilon > -1$ for $p < 7{,}5$
(c) $\varepsilon > -1$ for $p > 7{,}5$
(d) $\varepsilon > -1$ for alle verdier av p
(e) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 11 (Midtveiseksamen 2016h, oppg 12)
Etterspørsel etter en vare er gitt ved $D(p) = 110 - 5p$. Elastisiteten $\mathrm{El}_p D(p) = -1$ for:
(a) $p = 7$
(b) $p = 11$
(c) $p = \frac{16}{5}$
(d) $p = 22$
(e) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 12 (Midtveiseksamen 2017v, oppg 4)
En bedrift har kostnadsfunksjonen $C(x) = 2015x^3 - 120x^2 + 2000x + 2800$ når $x \geqslant 0$. Hva er den minimale enhetskostnaden?
(a) 2 kr
(b) 12 kr
(c) 3980 kr
(d) 7960 kr
(e) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 13 (Midtveiseksamen 2016h, oppg 11)
Vi betrakter grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - x\ln(x)}{e^x}$$

Hvilket utsagn er sant?
(a) Grenseverdien eksisterer ikke
(b) Grenseverdien er 1
(c) Grenseverdien er $-\frac{1}{2}$
(d) Grenseverdien er 0
(e) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 14 (Midtveiseksamen 2015h, oppg 15)
Vi betrakter grenseverdien

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Hvilket utsagn er sant?
(a) Grenseverdien eksisterer ikke
(b) Grenseverdien er 0
(c) Grenseverdien er 1
(d) Grenseverdien er $-\frac{1}{2}$
(e) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Fasit

Oppgave 1

(a) $P_1(x) = 1 + x$, $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, $P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

(b) $P_1(1) = 2$, $P_2(1) = 2{,}5$, $P_3(1) = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$, $P_4(x) = \frac{65}{24} \approx 2{,}71$. Avstanden fra $f(1) = e$ er (tilnærmet): $|f(1) - P_1(1)| = |e - 2| = 0{,}72$, $|f(1) - P_2(1)| = |e - 2{,}5| = 0{,}22$, $|f(1) - P_3(1)| = |e - \frac{8}{3}| = 0{,}052$, $|f(1) - P_4(1)| = |e - \frac{65}{24}| = 0{,}0099$

Oppgave 2

(a) $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x + x^2$, $P_3(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2}$, $P_4(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6}$

(b) $P_1(1) = 1$, $P_2(1) = 2$, $P_3(1) = 2{,}5$, $P_4(x) = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$. Avstanden fra $f(1) = e$ er (tilnærmet): $|f(1) - P_1(1)| = |e - 1| = 1{,}72$, $|f(1) - P_2(1)| = |e - 2| = 0{,}72$, $|f(1) - P_3(1)| = |e - 2{,}5| = 0{,}22$, $|f(1) - P_4(1)| = |e - \frac{8}{3}| = 0{,}052$

Oppgave 3

(a) $P_1(x) = (x-1)$, $P_2(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}$, $P_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$, $P_4(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$

(b) $P_1(2) = 1$, $P_2(2) = \frac{1}{2}$, $P_3(1) = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$, $P_4(x) = \frac{7}{12} \approx 0.58$. Avstanden fra $f(2) = \ln(2)$ er (tilnærmet): $|f(2) - P_1(2)| = |\ln(2) - 1| = 0{,}31$, $|f(2) - P_2(2)| = |\ln(2) - \frac{1}{2}| = 0{,}19$, $|f(2) - P_3(2)| = |\ln(2) - \frac{5}{6}| = 0{,}14$, $|f(2) - P_4(2)| = |\ln(2) - \frac{7}{12}| = 0{,}11$

Oppgave 4

(a) $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = (x-1)^2$, $P_3(x) = (x-1)^2 - \frac{(x-1)^3}{2}$, $P_4(x) = (x-1)^2 - \frac{(x-1)^3}{2} + \frac{(x-1)^4}{3}$

(b) $P_1(2) = 0$, $P_2(2) = 1$, $P_3(2) = \frac{1}{2}$, $P_4(2) = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$, Avstanden fra $f(2) = \ln(2)$ er (tilnærmet): $|f(2) - P_1(2)| = |\ln(2) - 0| = 0{,}69$, $|f(2) - P_2(2)| = |\ln(2) - 1| = 0{,}31$, $|f(2) - P_3(2)| = |\ln(2) - \frac{1}{2}| = 0{,}19$, $|f(2) - P_4(2)| = |\ln(2) - \frac{5}{6}| = 0{,}14$

Oppgave 5

(a) $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 0$, $P_3(x) = 0$, $P_4(x) = x^4$

(b) $P_1(10) = 0$, $P_2(10) = 0$, $P_3(10) = 0$, $P_4(10) = 10\,000$, Avstanden fra $f(2) = 10\,000$ er: $|f(2) - P_1(2)| = |10\,000 - 0| = 10\,000$, $|f(2) - P_2(2)| = |10\,000 - 0| = 10\,000$, $|f(2) - P_3(2)| = |10\,000 - 0| = 10\,000$, $|f(2) - P_4(2)| = |10\,000 - 10\,000| = 0$

Oppgave 6

(a) $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 0$, $P_3(x) = 0$, $P_4(x) = 0$

(b) $P_1(10) = 0$, $P_2(10) = 0$, $P_3(10) = 0$, $P_4(10) = 10\,000$, Avstanden fra $f(2) = 100\,000$ er: $|f(2) - P_1(2)| = |100\,000 - 0| = 100\,000$, $|f(2) - P_2(2)| = |100\,000 - 0| = 100\,000$, $|f(2) - P_3(2)| = |100\,000 - 0| = 100\,000$, $|f(2) - P_4(2)| = |100\,000 - 0| = 100\,000$

Oppgave 7

(a) $P_1(x) = 32 + 80(x-2)$, $P_2(x) = 32 + 80(x-2) + 80(x-2)^2$, $P_3(x) = 32 + 80(x-2) + 80(x-2)^2 + 40(x-2)^3$, $P_4(x) = 32 + 80(x-2) + 80(x-2)^2 + 40(x-2)^3 + 10(x-2)^4$

(b) $P_1(10) = 672$, $P_2(10) = 5\,792$, $P_3(10) = 26\,272$, $P_4(10) = 67\,232$, Avstanden fra $f(2) = 100\,000$ er: $|f(2) - P_1(2)| = |100\,000 - 672| = 99\,328$, $|f(2) - P_2(2)| = |100\,000 - 5\,792| = 94\,208$, $|f(2) - P_3(2)| = |100\,000 - 26\,272| = 73\,728$, $|f(2) - P_4(2)| = |100\,000 - 67\,232| = 32\,768$

Oppgave 8

(a) Dette er et $\frac{0}{0}$-uttrykk. Kan derfor bruke l'Hôpitals regel. Deriverer teller og nevner. Får et nytt $\frac{0}{0}$-uttrykk og bruker l'Hôpitals regel en gang til:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})}{x^3} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x)}{3x^2} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{6x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}$$

(c) $\frac{1}{24}$
(d) $\frac{1}{120}$

Oppgave 9

(a) Dette er et $\frac{0}{0}$-uttrykk. Kan derfor bruke l'Hôpitals regel. Deriverer teller og nevner. Får et nytt $\frac{0}{0}$-uttrykk og bruker l'Hôpitals regel en gang til:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)-(x-1)}{(x-1)^2}\overset{\text{l'Hôp}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}\overset{\text{l'Hôp}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{2}=-\frac{1}{2}$$

(b)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)-[(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}]}{(x-1)^3}\overset{\text{l'Hôp}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-[1-(x-1)]}{3(x-1)^2}\overset{\text{l'Hôp}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}+1}{6(x-1)}\overset{\text{l'Hôp}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{x^3}}{6}=\frac{1}{3}$$

(c) $-\frac{1}{4}$
(d) $\frac{1}{5}$

Oppgave 10 (Midtveiseksamen 2017v, oppg 12)
b

Oppgave 11 (Midtveiseksamen 2016h, oppg 12)
b

Oppgave 12 (Midtveiseksamen 2017v, oppg 4)
c

Oppgave 13 (Midtveiseksamen 2016h, oppg 11)
d

Oppgave 14 (Midtveiseksamen 2015h, oppg 15)
d