Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Løs de bestemte integralene:

a) $\int_0^1 x \, \mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x$ d) $\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x$ e) $\int_0^1 (e^x + e^{-x}) \, \mathrm{d}x$

f) $\int_{-1}^1 x \, \mathrm{d}x$ g) $\int_{-1}^1 x^2 \, \mathrm{d}x$ h) $\int_{-1}^1 x^3 \, \mathrm{d}x$ i) $\int_{-1}^1 e^x \, \mathrm{d}x$ j) $\int_{-1}^1 (e^x + e^{-x}) \, \mathrm{d}x$

Oppgave 2.
Løs de bestemte integralene:

a) $\int_0^1 xe^x \, \mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 x \ln(x^2+1) \, \mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+6} \, \mathrm{d}x$ d) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+4} \, \mathrm{d}x$

e) $\int_{-1}^1 xe^x \, \mathrm{d}x$ f) $\int_{-1}^1 x \ln(x^2+1) \, \mathrm{d}x$ g) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+5x+6} \, \mathrm{d}x$ h) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+4} \, \mathrm{d}x$

Oppgave 3.
Skriv ned en Riemann-sum med n delintervaller som kan brukes til å estimere arealet under grafen til $y = 1/x$ i intervallet $I = [1,2]$ for de verdiene av n som er gitt nedenfor. Regn så ut summene.

a) $n = 2$ b) $n = 4$ c) $n = 8$

Oppgave 4.
Vis Riemann-summene i Oppgave 3 og grafen til $y = 1/x$ for $1 \leq x \leq 2$ i samme figur.

Oppgave 5.
Bruk et bestemt integral til å regne ut arealet under grafen til $y = 1/x$ i intervallet $I = [1,2]$, og sammenlign dette med estimatene du fant i Oppgave 3. Skriv så ned en Riemann-sum med n delintervaller ved hjelp av sum-notasjon.

Oppgave 6.
Regn ut det bestemte integralet $\int_0^2 (x^3 - 3x + 1) \, \mathrm{d}x$, og forklar at svaret kan tolkes som $A_1 - A_2 + A_3$, der A_1, A_2, A_3 er arealet av områdene R_1, R_2, R_3 i xy-planet. Vis så disse områdene på en skisse.

Oppgave 7.
La R være området begrenset av grafen til $y = \ln(2 + x)$, linjen $y = 2$, og y-aksen. Tegn inn området R på en figur, og regn ut arealet til R.

Oppgave 8.
La R være området begrenset av grafene til $y = x$ og $y = x^2$. Tegn inn området R på en figur, og regn ut arealet til R.

Oppgave 9.
Løs de (uegentlige) integralene nedenfor. Tolk hvert integral som et areal, og tegn figur.

a) $\int_1^\infty 1/x \, \mathrm{d}x$ b) $\int_1^\infty 1/x^2 \, \mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 -\ln x \, \mathrm{d}x$ d) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$ e) $\int_0^\infty \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

Oppgave 10.
Et eiendomsselskap har en inntektstrøm fra sine leietager som for tiden er 300 millioner kroner per år. Vi antar at inntekststrømmen vil øke i årene som kommer, og velger den kontinuerlige funksjonen

$$f(t) = 300 \cdot e^{\sqrt{t/10}}$$

som modell for inntektsraten (i millioner kr per år) etter t år. Regn ut den samlede inntekten i løpet av de neste 10 årene. Hvor mye av denne inntektsstrømmen kommer i løpet av de første to årene?

Oppgave 11.
Oppgaver fra læreboken: 5.6.1 - 5.6.5, 5.7.1 - 5.7.2

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
a) $1/2$ b) $1/3$ c) $1/4$ d) $e - 1$ e) $e - 1/e$

f) 0 g) $2/3$ h) 0 i) $e - 1/e$ j) $2(e - 1/e)$

Oppgave 2.
a) 1 b) $\ln(2) - 1/2$ c) $2\ln(3) - 3\ln(2)$ d) $1/6$

e) $2/e$ f) 0 g) $\ln(3) - \ln((2)$ h) $2/3$

Oppgave 3.
a) $0.5 \cdot 2/3 + 0.5 \cdot 1/2 \approx 0.583$

b) $0.25 \cdot 4/5 + 0.25 \cdot 2/3 + 0.25 \cdot 4/7 + 0.25 \cdot 1/2 \approx 0.635$

c) $0.125 \cdot 8/9 + 0.125 \cdot 4/5 + 0.125 \cdot 8/11 + 0.125 \cdot 2/3 + 0.125 \cdot 8/13 + 0.125 \cdot 4/7 + 0.125 \cdot 8/15 + 0.125 \cdot 1/2 \approx 0.663$

Oppgave 5.
Arealet er $\ln(2) \approx 0.693$ og Riemann-summen kan skrives

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + i/n} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Oppgave 6.
0

Oppgave 7.
$e^2 - 6 + \ln(4)$

Oppgave 8.
1/6

Oppgave 9.
a) ∞ b) 1 c) 1 d) $2e - 2$ e) $2e$

Oppgave 10.
6000 og $6000\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot e^{1/\sqrt{5}}\right) \approx 813$

Oppgave 11.
Fullstendig løsning av oppgaver fra læreboken [E] finnes i oppgaveboken [O].