Veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
Regn ut lengden av vektorene **u** og **v**, og arealet av parallellogrammet utspent av disse vektorene. Vis figur.

a) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$

Oppgave 2.
Regn ut lengden av vektorene **u**, **v** og **w**, og volumet av parallellepipedet utspent av disse vektorene. Tegn figur om du kan.

a) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 3.
Regn ut determinantene:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$

Oppgave 4.
Regn ut determinantene:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix}$

Oppgave 5.
Regn ut determinantene, og avgjør når determinantene er null:

a) $\begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & 1 & 7 \\ 0 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 2a \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 3 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

Oppgave 6.
Regn ut determinantene:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

Oppgave 7.
Avgjør hvor mange løsninger de lineære systemene har for ulike verdier av parameteren a.

$$a)\quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & az & = & 0 \\ 2x & - & ay & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \end{array} \qquad b)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & ay & - & z & = & a-5 \\ -x & + & 2y & + & az & = & -3 \\ ax & - & y & + & 2z & = & a+10 \end{array}$$

Oppgave 8.
Hvis A er en kvadratisk matrise, og E er en trappform som vi finner ved å gjøre elementære radoperasjoner på A, er det alltid slik at $|A| = |E|$? Begrunn hvorfor/hvorfor ikke, og gi eksempler.

Oppgave 9.
Oppgaver fra læreboken: 6.4.1 - 6.4.5, 6.4.7

Svar på veiledningsoppgaver

Oppgave 1.
a) $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{v}|| = 5,\ A = 25$
b) $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{v}|| = 5,\ A = 24$
c) $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{v}|| = 13,\ A = 169$

Oppgave 2.
a) $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{w}|| = 1,\ ||\mathbf{v}|| = 2, \quad V = 2$
b) $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{w}|| = \sqrt{3},\ ||\mathbf{v}|| = \sqrt{21}, \quad V = 6$

Oppgave 3.
a) 2
b) -2
c) 2
d) -2
e) 0
f) $ac - b^2$

Oppgave 4.
a) 2
b) 2
c) 0
d) 6
e) $(1-a)(1-b)(b-a)$

Oppgave 5.
a) Determinant $16 - a^2$, den er null for $a = \pm 4$
b) Determinant $-a^2 + 2a + 7$, den er null for $a = 1 \pm \sqrt{8}$
c) Determinant $2a^2(1-a)$, den er null for $a = 0$ og $a = 1$
d) Determinant $4 - 2a$, den er null for $a = 2$
e) Determinant $(a-1)^2(a+2)$, den er null for $a = 1$ og $a = -2$

Oppgave 6.
a) 4
b) -10
c) -12

Oppgave 7.
a) Uendelig mange løsninger for $a = \pm 1$, én løsning for $a \neq \pm 1$
b) Uendelig mange løsninger for $a = -1$, én løsning for $a \neq -1$

Oppgave 8.
Determinantene er like hvis og bare hvis vi kan komme fra A til E ved å kunne bruke elementære radoperasjoner som er å legge til et multippel av en rad til en annen rad.

Oppgave 9.
Fullstendig løsning finnes i oppgaveboken [O].