MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2018
Oppgaver

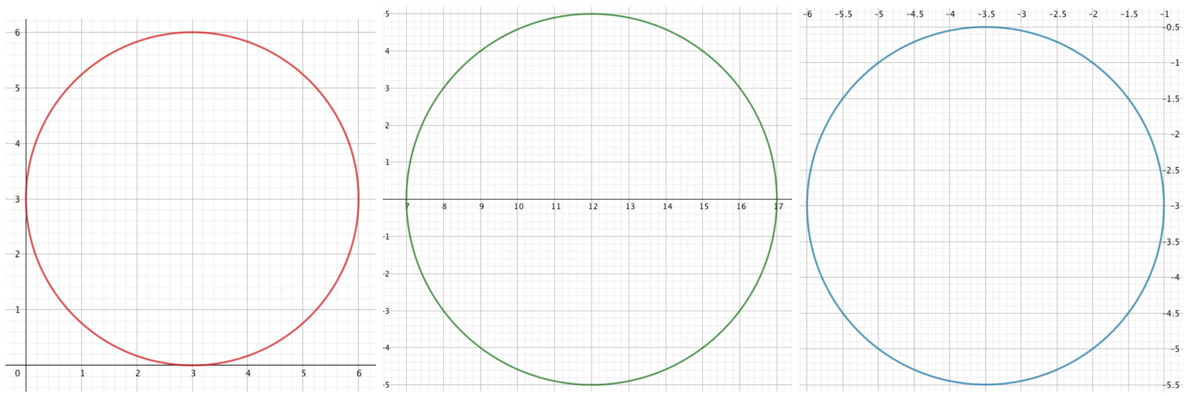
Forelesning 9

Kap 3.9-11: Rasjonale funksjoner og asymptoter. Kontinuitet. Omvendte funksjoner.

[L] 3.8.1-4
[L] 3.9.1-4
[L] 3.10.1-2
[L] 3.11.1-3
Midtveiseksamen 2015h oppg 9
Midtveiseksamen 2016v oppg 9
Midtveiseksamen 2016h oppg 8
Midtveiseksamen 2017v oppg 8
Midtveiseksamen 2018v oppg 8

Oppgaver for veiledningstimene
torsdag 4/10 kl 14-16 i D1-080

Oppgave 1 Finn likningene til sirklene i figur 1.



Figur 1: Sirkler a-c

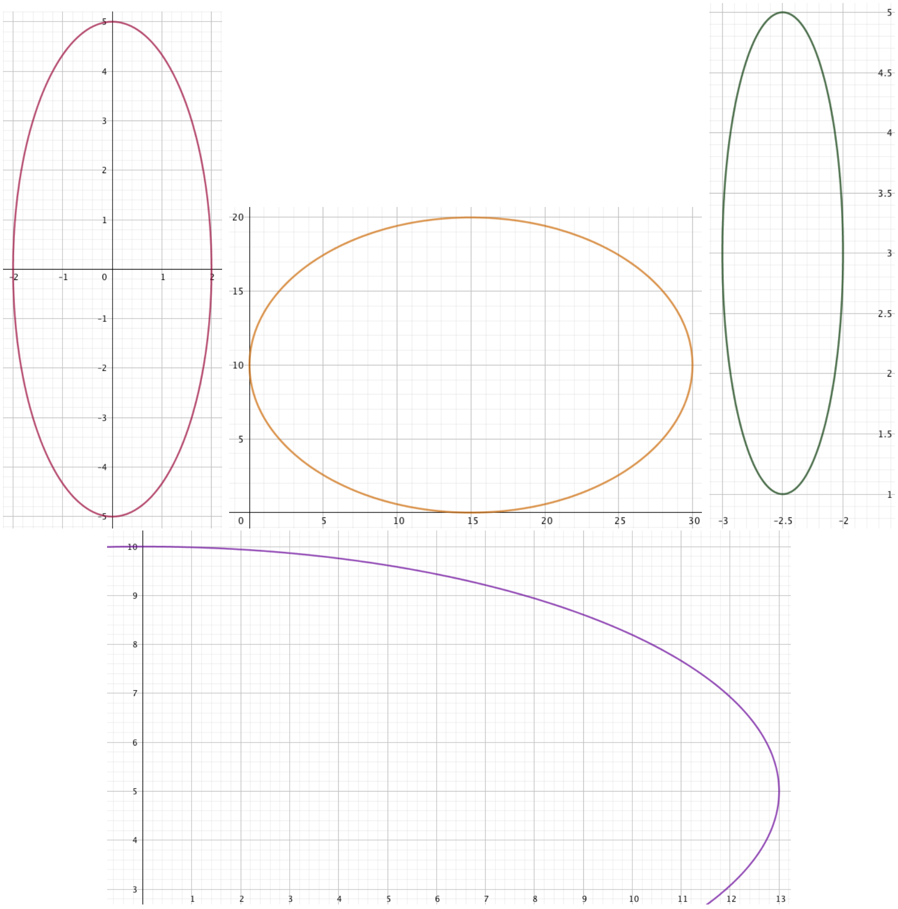
Oppgave 2 Finn sentrum S og radius r til sirklene.
(a) $(x-3)^2+(y-4)^2=5$ (b) $(x+1)^2+y^2=3$ (c) $(3x-2)^2+(3y-4)^2=9$
(d) $x^2+y^2-4x-10y=-25$ (e) $x^2+y^2+6x-12y=-44$
(f) $25x^2+25y^2-20x-30y=-12$

Oppgave 3 Finn likningene til ellipsene i figur 2.
Oppgave 4 Bestem funksjonsuttrykket $f(x)=c+\frac{a}{x-b}$ til hyperblene i figur 3.
Oppgave 5 Finn asymptotene til hyperblene i oppgave 4.

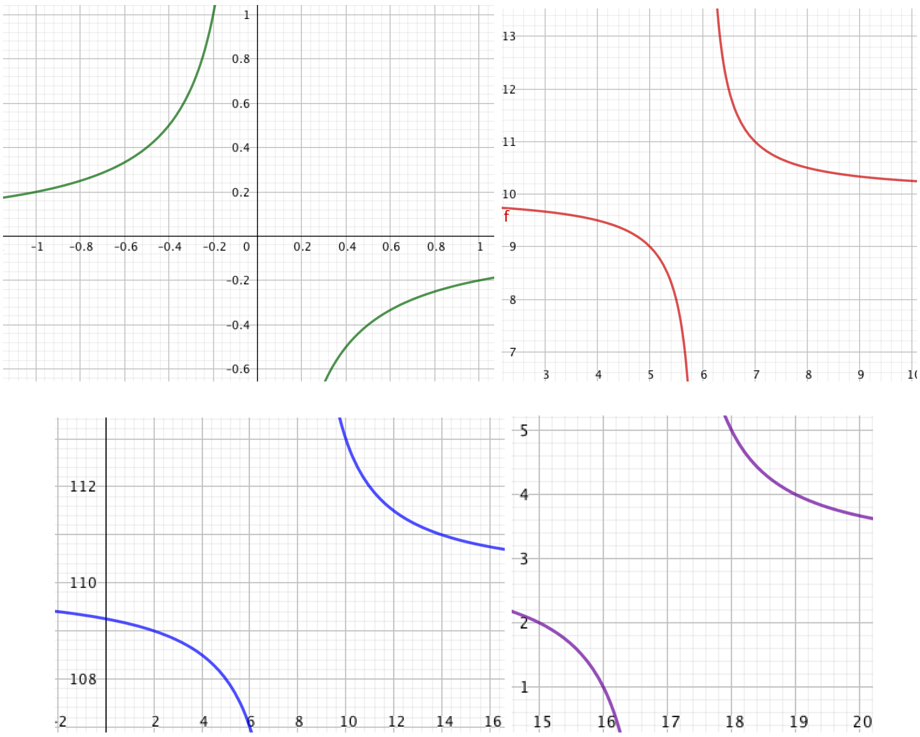
Oppgave 6 Finn asymptotene til de rasjonale funksjonene.
(a) $f(x)=\frac{4x-10}{x-3}$ (b) $f(x)=\frac{70-40x}{3-2x}$ (c) $f(x)=\frac{3x^2-6x+8}{x^2+3}$ (d) $f(x)=\frac{4x^2-28x+40}{x^2-4x+3}$
(e) $f(x)=\frac{x^2+3x+5}{x-7}$ (f) $f(x)=\frac{x^3-8}{x^2-10x+16}$

Oppgave 7 Avgjør om funksjonen $f(x)$ har et nullpunkt i intervallet I. Tips: Skjæringssetningen!
(a) $f(x)=\sqrt{x-2}-x+3$ og $I=[4,\ 5]$
(b) $f(x)=(x-5)\sqrt{(0{,}2x+5)}-0{,}2(x-3)^2$ og $I=[5,\ 15]$
(c) $f(x)=\frac{4x-10}{x-3}-4$ og $I=[2,\ 4]$

Oppgave 8 Finn funksjonsuttrykkene til de omvendte funksjonene med definisjonsmengde og verdimengde.
(a) $f(x)=\frac{4x-10}{x-3}$ (b) $f(x)=\frac{70-40x}{3-2x}$ (c) $f(x)=\sqrt{2x-3}+x$



Figur 2: Ellipser a-d



Figur 3: Hyperbler a-d

Fasit

Oppgave 1
(a) $(x-3)^2+(x-3)^2=9$ (b) $(x-12)^2+y^2=25$ (c) $(x+3{,}5)^2+(x+3)^2=6{,}25$

Oppgave 2
(a) $S=(3{,}4), r=\sqrt{5}$ (b) $S=(-1{,}0), r=\sqrt{3}$ (c) $S=(\frac{2}{3},\frac{4}{3}), r=1$
(d) $S=(2{,}5), r=2$ (e) $S=(-3{,}6), r=1$ (f) $S=(\frac{2}{5},\frac{3}{5}), r=\frac{1}{5}$

Oppgave 3
(a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ (b) $\frac{(x-15)^2}{225}+\frac{(y-10)^2}{100}=1$ (c) $4(x+2{,}5)^2+\frac{(y-3)^2}{4}=1$
(d) $\frac{x^2}{169}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$

Oppgave 4
(a) $f(x)=-\frac{1}{5x}$ (b) $f(x)=\frac{1}{x-6}+10$ (c) $f(x)=\frac{6}{x-8}+110$ (d) $f(x)=\frac{2}{x-17}+3$

Oppgave 5
(a) vertikal asymptote: $x=0$, horisontal asymptote: $y=0$
(b) vertikal asymptote: $x=6$, horisontal asymptote: $y=10$
(c) vertikal asymptote: $x=8$, horisontal asymptote: $y=110$
(d) vertikal asymptote: $x=17$, horisontal asymptote: $y=3$

Oppgave 6
(a) $f(x)=4+\frac{2}{x-3}$ så vertikal asymptote: $x=3$, horisontal asymptote: $y=4$
(b) $f(x)=20+\frac{10}{3-2x}$ så vertikal asymptote: $x=\frac{3}{2}$, horisontal asymptote: $y=20$
(c) $f(x)=3-\frac{6x+1}{x^2+3}$ så ingen vertikal asymptote, horisontal asymptote: $y=3$
(d) $f(x)=4-\frac{4(3x-7)}{(x-1)(x-3)}$ så vertikal asymptote: $x=4$, horisontale asymptoter: $y=1$ og $y=3$
(e) $f(x)=x+10+\frac{75}{x-7}$ så vertikal asymptote: $x=7$, skrå asymptote: $y=x+10$
(f) $f(x)=x+10+\frac{84}{x-8}$ så vertikal asymptote: $x=8$, skrå asymptote: $y=x+10$
Hjelperegning:

$$\begin{array}{rrrrl}
\big(\;\;x^3 & & & -8\big) & :\big(x^2-10x+16\big)=x+10+\dfrac{84x-168}{x^2-10x+16} \\
-x^3 & +10x^2 & -16x & & \\
\hline
 & 10x^2 & -16x & -8 & \\
 & -10x^2 & +100x & -160 & \\
\hline
 & & 84x & -168 &
\end{array}$$

Oppgave 7
(a) $f(x)$ har nullpunkt mellom $x=4$ og $x=5$ ved skjæringssetningen fordi $f(4)=\sqrt{4-2}-4+3=0{,}41>0$ mens $f(5)=\sqrt{5-2}-5+3=-0{,}27<0$ og funksjonen er definert og kontinuerlig på hele intervallet.
(b) $f(x)$ har nullpunkt mellom $x=5$ og $x=6$ ved skjæringssetningen fordi $f(5)=-0{,}80$ mens $f(6)=0{,}69>0$ og funksjonen er definert og kontinuerlig på hele intervallet. NB: $f(15)=-0{,}52<0$ sammen med $f(6)>0$ forteller at $f(x)$ har nullpunkt mellom $x=6$ og $x=15$. Så f(x) har minst 2 nullpunkter på intervallet $[5,\ 15]$.
(c) $f(x)=\frac{2}{x-3}$ har ingen nullpunkter på intervallet $I=[2,\ 4]$ fordi likningen $\frac{2}{x-3}=0$ ikke har noen løsninger. NB: Vi kan ikke bruke skjæringssetningen selv om $f(2)=-2<0$ og $f(4)=2>0$ fordi $f(x)$ ikke er definert i hele intervallet (selv om $f(x)$ er kontinuerlig for alle x der den er definert).

Oppgave 8
(a) $x=f^{-1}(y)=\frac{3y-10}{y-4}$, $D_{f^{-1}}$ er alle tall bortsett fra 4, $V_{f^{-1}}$ er alle tall bortsett fra 3
(b) $x=f^{-1}(y)=\frac{70-3y}{40-2y}$, $D_{f^{-1}}$ er alle tall bortsett fra 20, $V_{f^{-1}}$ er alle tall bortsett fra $\frac{3}{2}$
(c) $x=f^{-1}(y)=y+1-\sqrt{2y-2}$, $D_{f^{-1}}=[\frac{3}{2},\infty\rangle$, $V_{f^{-1}}=[\frac{3}{2},\infty\rangle$.