MET 11 81, 1. forelesning, 19. aug. 2019, Runar Ile

Plan:
1. Intro. til kurset
2. Algebraiske uttrykk
3. Regnelover
4. Røtter
5. Potenser
6. Prioriteringsregler

1. Intro. til kurset

Høst	Vår
• Finansmatematikk	• Integrasjon
• Funksjoner og grafer	• Lineære likningssystemer
• Derivasjon og funksjons drøfting	• Funksjoner i to variabler $z = f(x, y)$.

2. Algebraiske uttrykk

Variabler: $x, y, z, x_1, x_2, x_3, \ldots$

$a, b, c, \ldots, m, n, \ldots$

skrivemåte

Multiplisere med tall:

$$3 \cdot x = 3x = x + x + x$$

$$3 \cdot 2 \neq 32$$

$$\sqrt{3} \cdot x = \sqrt{3}x$$

$$(-1) \cdot x = -x$$

$$1 \cdot x = x$$

Addere: $x + x = 2x$

$x + y$ kan ikke gjøres enklere

$x + y + x = 2x + y$

Multiplisere: $x \cdot y = xy$

$x \cdot x = x^2$

$xy \cdot x^2 = x^3 y = x \cdot x \cdot x \cdot y$

Dividere: $\frac{x+y}{z}$, $\frac{x-y}{x+y}$ osv.

<u>Rasjonale uttrykk</u>: Brøker med polynom i teller og i nevner: $\frac{y}{x^2+1}$ osv

Også $\sqrt{x^2+1}$, $\frac{3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$, ... er <u>uttrykk</u>

(men ikke rasjonale)

Vi kan sette inn tall for variablene.

<u>Eks</u>: I uttrykket $\frac{2y}{x^2+1}$ kan vi sette

$x = 3$ og $y = -1$.

Da får vi et tall: $\frac{2 \cdot (-1)}{3^2+1} = \frac{-2}{10} = -\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 5} = -\frac{1}{5}$

$= -0,20$

Hvis $x=1$, $y=3$ får vi

$$\frac{2\cdot 3}{1^2+1} = \frac{6}{2} = 3$$

Uttrykket $\frac{2y}{x^2+1}$ kan ikke forenkles.

Oppg Vi har uttrykket $\frac{x^2-x-6}{x-3}$

a) Fyll ut tabellen

x	1	5	-2	2	8	3
$\frac{x^2-x-6}{x-3}$	3	7	0	4	10	$\frac{0}{0}$ ikke et tall!

b) Finn mønsteret.

Svar: $x+2$ (for $x \neq 3$)

$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$ så

$$\frac{x^2-x-6}{x-3} = \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} \overset{x\neq 3}{=} x+2$$

3. Regnelover

Anta a, b, c er uttrykk (eller tall)

Da har vi:

(1) Addisjon er kommutativ: $a + b = b + a$

Eks: $a = 2x+1$, $b = x-y$

Da er $(2x+1) + (x-y) = (x-y) + (2x+1)$

---

(2) Multiplikasjon er kommutativ:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Eks: $(2x+1)\cdot(x-y) = (x-y)\cdot(2x+1)$

---

(3) Addisjon er assosiativ:

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

Eks: $(2x+3)+y = 2x+(3+y)$

---

(4) Multiplikasjon er assosiativ:

$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$$

Eks: $(3\cdot x)\cdot y = 3\cdot(x\cdot y)$

Eks: $2\cdot(3\cdot 4)$ $\quad$ $(2\cdot 3)\cdot 4$

$= 2 \cdot 12$ $\quad$ $= 6\cdot 4$

$= 24$ $\quad$ $= 24$

(5) Den distributive loven

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Eks: $2 \cdot (3+4)$ $\quad$ $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$

$= 2 \cdot 7$ $\quad$ $= 6 + 8$

$= 14$ $\quad$ $= 14$

Eks: $x(x+3) = x \cdot x + x \cdot 3 = x^2 + 3x$

Kvadratsetningen:

$$(x+r)^2 = \overbrace{(x+r)}^{a} \cdot (\overset{b}{x} + \overset{c}{r})$$

distr. lov

$$= (x+r) \cdot x + (x+r) \cdot r$$

komm. $\cdot$

$$= x \cdot (x+r) + r \cdot (x+r)$$

distr. lov

$$= x \cdot x + x \cdot r + r \cdot x + r \cdot r$$

komm. $\cdot$

$$= x^2 + r \cdot x + r \cdot x + r^2$$

distr. lov

$$= x^2 + 2 \cdot r \cdot x + r^2 = x^2 + 2rx + r^2$$

Samme svar

Eks: $(x+1)^2 \overset{r=1}{=} x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 = x^2 + 2x + 1$

Oppg: Bruk kvadratsetningen til å skrive
$x^2 + 6x + 9$ som et kvadrat

Løsning: Må finne r slik at

(1) $2r = 6$ og

(2) $r^2 = 9$. Fra (1) får vi $r = \frac{6}{2} = 3$

som stemmer i (2), så kvadratsetn.

gir $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$

Konjungatsetningen

$$(x-r)(x+r) \overset{\text{distr. lov.}}{=} (x-r)\cdot x + (x-r)\cdot r$$

$$\overset{\text{distr. lov.}}{=} x \cdot x - r \cdot x + x \cdot r - r \cdot r$$

$$= x^2 - r^2$$

Samme svar

Eks: $99 = 100 - 1 \overset{\text{konj.-setn.}}{=} (10-1)(10+1)$
$= 9 \cdot 11$

Oppg Bruk konj.-setn. til å faktorisere
$x^2 - 25$ som et produkt av
førstegradspolynomer.

Løsning: $r^2 = 25$ så $r = 5$ eller $r = -5$

$r=5$: $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$

$r=-5$: $x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$

OPPG Bruk kvadrat.- og konjungatsetn. til å faktorisere uttrykkene.

a) x^2-16 $\qquad (x-4)(x+4)$ $\qquad (r=4)$

b) x^2-2x+1 $\qquad (x-1)^2$ $\qquad (r=-1)$

c) $x^2+10x+25$ $\qquad (x+5)^2$ $\qquad (r=5)$

d) $9x^2-4y^2$ $\qquad (3x-2y)(3x+2y)$ $\qquad (r=2y)$

e) $x^2+6xy+9y^2$ $\qquad (x+3y)^2$ $\qquad (r=3y)$

Husk: $(x+r)^2 = x^2+2rx+r^2$

(b): $\begin{cases} 2r = -2 \\ r^2 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $r=-1$

$(-1)^2 = 1$ (ok)

(e): $\begin{cases} 2r = 6y \\ r^2 = 9y^2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $r = \frac{6y}{2} = 3y$

og $\underbrace{(3y)^2}_{\text{vs.}} = 3y \cdot 3y = \underbrace{9y^2}_{\text{hs.}}$ - ok!

Husk: $(x-r)(x+r) = x^2-r^2$

(d): Her er x-en 3x og r-en 2y

4. Røtter

Kvadratroten til 5 er det positive tallet a slik at $a \cdot a = 5$. Det finnes i kalkulatoren: $a = 2{,}2361\ldots$

Vi skriver $a = \sqrt{5}$

NB: Det finnes <u>ikke</u> kvadratrøtter av negative tall!

$\sqrt{0} = 0$

Kan lage uttrykk med kvadratrøtter

<u>Eks:</u> $\sqrt{x^2+16}$. Vi kan sette inn $x=3$ og få $\sqrt{3^2+16} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

<u>Oppg</u> (uten kalk!) Beregn:

a) $(\sqrt{2}+3)^2$

Bruker kvadratsetn:

$(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\cdot 3 + 3^2$

$= \underline{\underline{11 + 6\sqrt{2}}}$

b) $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$

Bruker konjugatsetn:

$(\sqrt{5})^2 - 1^2 = 5-1 = \underline{\underline{4}}$

Det finnes andre typer røtter:

$\sqrt[3]{5}$ er tallet a slik at $a \cdot a \cdot a = 5$

(faktisk $a = 1{,}7100\ldots$)

$\sqrt[5]{32} = 2$

---

5. Potenser

– gjentatt multiplikasjon

Eks: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \overset{\text{skrivemåte}}{=} 3^4$ („tre i fjerde")

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ („fire i tredje")

grunntallet

–eksponenten

$4^3 \neq 4 \cdot 3$!!

$4^3 = 64$, $4 \cdot 3 = 12$

$10^2 \cdot 10^3 = (10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10)$

$= 10^5$

$= 10^{2+3}$

– vi legger sammen eksponentene når vi multipliserer potenser med samme grunntall.

$$\frac{3^6}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 3}{1} = 3^2$$

$$= 3^{6-4}$$

$$\frac{5^3}{5^3} = 1 = 5^{3-3} = 5^0$$

Generelt: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Eks: $(3^2)^4 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2$

$$= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$= 3^8$$

$$= 3^{2 \cdot 4}$$

6. Prioriteringsregler

<u>Oppg</u>: Beregn $2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14$

$(2+3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$

<u>Oppg</u>: $2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 4 = 8$

$(2 \cdot 2)^2 = 4^2 = 16$

– konvensjoner: Bestemt for lenge siden. Kunne vært motsatt.

Hjemmeoppg: Tast $2 + 3 \cdot 4$ på kalkulatoren. Se hva du får.