MET 1181, 5. forelesning, 9. sept. 2019, Runar Ile

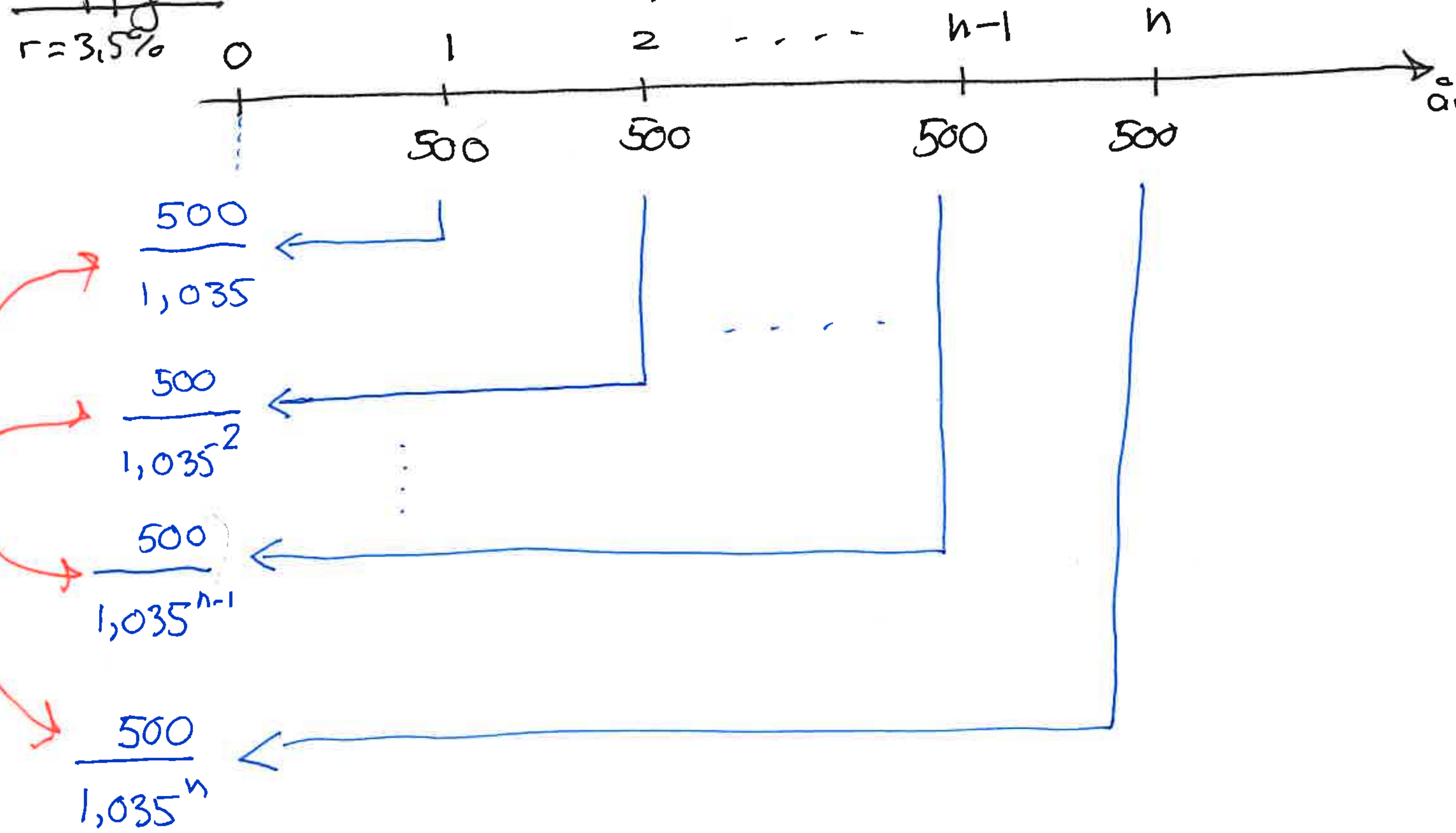
Plan: 1. Repetisjon og veiledningsoppg.
2. Lineære og kvadratiske likninger
3. Likninger med parametre

1. Repetisjon og oppg.

Finansmatematikken $\begin{cases} \text{Vekstfaktor} \\ \text{Nåverdi} \\ \text{Kontantstrøm} \end{cases}$

Oppg 2 Kontantstrøm

$r = 3{,}5\%$



Sum = totale nåverdien til kontantstrømmen.

a) Nåverdien: $\frac{500}{1{,}035} + \frac{500}{1{,}035^2} + \dots + \frac{500}{1{,}035^n}$

Denne rekken er en geometrisk rekke på to måter.

Mot høyre: $a_1 = \frac{500}{1,035}$, $k = \frac{1}{1,035}$, n = ant. ledd

Da er summen $a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1} = \frac{500}{1,035} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1,035}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{1,035} - 1\right)}$

Mot venstre: $a_1 = \frac{500}{1,035^n}$, $k = 1,035$, n = ant. ledd.
(‚baklengs')

Da er summen $a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1} = \frac{500}{1,035^n} \cdot \frac{1,035^n - 1}{0,035}$

– lettere uttrykk å regne på.

b) Setter inn for ulike verdier av n:

ant. år n	10	20	40	80	1000
nåverdi	4.158 302	7.106 201	10 677 536	13.374 387	14.285 714,29

c) Nåverdien av en evigvarende kontantstrøm:
Tallet som summen av n ledd nærmer seg
når vokser:

$$\frac{500}{1,035^n} \cdot \frac{1,035^n - 1}{0,035} = \frac{500 \cdot (1,035^n - 1) : 1,035^n}{1,035^n \cdot 0,035 : 1,035^n}$$

$$= \frac{500 \cdot \left(1 - \frac{1}{1,035^n}\right)}{0,035} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{500 \cdot (1-0)}{0,035} = \frac{500}{0,035}$$

$$= 14\,285\,714,29$$

når n vokser, vil $1,035^n$ vokse mot ∞
og $\frac{1}{1,035^n}$ vil nærme seg 0 mer og mer.

Oppg 6 a) Nåverdien til 30 mill om 5 år med diskonteringsrente 13 % med kontinuerlig forrentning.

Årlig vekstfaktor: $e^{0,13}$

Nåverdi: $\dfrac{30 \text{ mill}}{(e^{0,13})^5} = \dfrac{30 \text{ mill}}{e^{0,13\cdot 5}} = \dfrac{30 \text{ mill}}{e^{0,65}}$

$= 15,66 \text{ mill}$

b) Kontantstrøm:

År	0	1	5	6	7
Bet	-70	-20	30	55	80

Nåverdien til kontantstrømmen = summen av nåverdiene til betalingene:

$$-70 - \frac{20}{e^{0,13}} + \frac{30}{e^{0,13\cdot 5}} + \frac{55}{e^{0,13\cdot 6}} + \frac{80}{e^{0,13\cdot 7}}$$

$= 20 \cdot \dfrac{1}{e^{0,13}} = 20 \cdot e^{-0,13}$

$= -14,49$.

c) Investeringen gir ikke en avkastning på 13 %.

d) Internrenten er omtrent 10 % fordi det gir nåverdien $-70 - \dfrac{20}{e^{0,1}} + \dfrac{30}{e^{0,1\cdot 5}} + \dfrac{55}{e^{0,1\cdot 6}} + \dfrac{80}{e^{0,1\cdot 7}}$

som er tilnærmet lik 0.

Avkastning på investeringen er omtrent 10 %

e) Hvis den første betalingen var

$70 - 14,49 = \underline{\underline{55,51}}$ ville investeringen

gi 13 % avkastning (internrente 13 %)

f) Fremtidsverdien etter 7 år av kontantstrømmen

$$-70\cdot e^{0,13\cdot 7} - 20\cdot e^{0,13\cdot 6} + 30\cdot e^{0,13\cdot 2} + 55\cdot e^{0,13\cdot 1} + 80$$

$$= \underline{\underline{-35,99}}$$

$$e^{0,13\cdot 7}\underbrace{\left(-70 - \frac{20}{e^{0,13}} + \frac{30}{e^{0,13\cdot 5}} + \frac{55}{e^{0,13\cdot 6}} + \frac{80}{e^{0,13\cdot 7}}\right)}_{\text{nåverdien}}$$

$$= e^{0,13\cdot 7}\cdot(-14,49)$$

Med 13% = internrenten er nåverdien 0

og da er fremtidsverdien

$$e^{0,13\cdot 7}\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

2. Lineære og kvadratiske likninger

Et lineært uttrykk : $ax+b$ (a og b er gitte tall)

Eks: $4x-3$ $(a=4,\ b=-3)$

En lineær likning : En likning som kan gjøres om til likningen $\underbrace{ax+b=0}_{\text{standardformen til en lineær likning}}$

Eks: $\frac{1}{x+3} = \frac{2}{x+4}$ | $\cdot(x+3)(x+4)$ multipliserer med felles nevner på b.s.

$x+4 = 2(x+3)$ distr. lov

$x+4 = 2x+6$ trekker fra $2x+6$ på b.s.

$-x-2 = 0$ en lineær likning på std. form $(a=-1,\ b=-2)$

$(x \neq -3$ og $x \neq -4)$

Et kvadratisk uttrykk : ax^2+bx+c (a, b, c er gitte tall)

En kvadratisk likning : Kan skrives på standardformen $ax^2+bx+c=0$

Eks: $3x+9 = (x-1)(x+3)$

ganger ut h.s. for å kunne trekke sammen med v.s.

$$3x+9 = x^2+\overbrace{3x-x}^{2x}-3$$

trekker fra $3x+9$ på b.s.

$x^2-x-12=0$ $(a=1, b=-1, c=-12)$

Eks: $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}=3$

trekker fra 3 på b.s.

$\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}-3=0 \quad | \cdot x(x+1)$

$x+1+2x-3x(x+1)=0$

$x+1+2x-3x^2-3x=0$

NB!

$-3x^2+1=0$ $(a=-3, b=0, c=1)$

$(x \neq -1 \text{ og } x \neq 0)$

Hvis $a \neq 0$ finnes det en formel for løsningene („abc-formelen") til likningen $ax^2+bx+c=0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Eks: $3x^2+4x-5=0 \quad (a=3,\ b=4,\ c=-5)$

abc-formelen gir

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4\cdot 3\cdot(-5)}}{2\cdot 3}$$

$$= -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{16+60}}{6} = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{4\cdot 19}}{6}$$

$$= -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{19}}{6} = -\frac{2}{3} \pm \frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{19}}{\cancel{6}\,3}$$

$$= -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{19}}{3} \qquad \left(= \frac{-2\pm\sqrt{19}}{3} \right).$$

---

tre tilfeller: $b^2-4ac > 0$ gir to ulike løsninger (røtter)

$b^2-4ac = 0$ gir én løsning

$b^2-4ac < 0$ gir ingen løsninger

Oppg: Bestem antall løsninger på likningen.

a) $x^2+5x+4{,}6=0$ $\quad 5^2-4\cdot 4{,}6 > 0$: to løsninger

b) $-x^2+2x-1=0$ $\quad 2^2-4(-1)(-1)=0$: en løsning

c) $4x^2-5x-5=0$ $\quad (-5)^2-4\cdot 4(-5)$

$= 25+80 > 0$: to løsninger

abc-formelen er ofte litt tungvint:

Eks: $-3x^2 + 7 = 0$ $(a=-3,\ \underline{b=0},\ c=7)$

trekker fra 7 fra b.s.

$$-3x^2 = -7$$

deler på -3 på b.s.

$$x^2 = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

$$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

så $x = \underline{\underline{\pm\sqrt{\frac{7}{3}}}}$.

Eks: $2x^2 - 6x = 0$ $(a=2,\ b=-6,\ \underline{c=0})$

$$2(x^2 - 3x) = 0$$

$$2 \cdot x \cdot (x - 3) = 0$$

enten er $2x = 0$ eller $x - 3 = 0$

$\underline{\underline{x = 0}}$ eller $\underline{\underline{x = 3}}$

NB: $a \cdot b = 0$ betyr at $a=0$ eller $b=0$ (eller begge deler)

Fullføre kvadratet

Eks: $\underbrace{x^2 + 6x} - 16 = 0$

Påstår at $x^2 + \boxed{6}x = (x+3)^2 - 9$ $:2$

fordi $(x+3)^2 \overset{\text{kvad. setn.}}{=} x^2 + 6x + 9$

$= (x+3)(x+3)$

Derfor kan likningen skrives som

$$(x+3)^2 - 9 - 16 = 0$$

dvs $(x+3)^2 = 9 + 16 = 25$

dvs $x + 3 = 5$ eller $x+3 = -5$

dvs $\underline{\underline{x = 2}}$ eller $\underline{\underline{x = -8}}$