MET1181 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2019
Oppgaver

I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 10
Kap 3.11-13: Omvendte funksjoner. Eksponentialfunksjoner. Logaritmer.

Under står det anbefalte oppgaver fra læreboken [L] og noen eksamensoppgaver. Oppgaveboken innholder løsningsforslag til alle oppgavene i læreboken og noen flere oppgaver.

[L] 3.9.1-4
[L] 3.10.1-2
[L] 3.11.1-3
[L] 3.12.1-5
[L] 3.13.1-3

Midtveiseksamen 2015h oppg 14
Midtveiseksamen 2016v oppg 11
Midtveiseksamen 2016h oppg 13
Midtveiseksamen 2017v oppg 13
Midtveiseksamen 2018v oppg 13

Repetisjon:
Midtveiseksamen 2015h oppg 9
Midtveiseksamen 2016v oppg 9
Midtveiseksamen 2016h oppg 7 og 8
Midtveiseksamen 2017v oppg 7 og 8
Midtveiseksamen 2018v oppg 8

Oppgaver for veiledningstimene
mandag 14/10 fra kl 14 i Study Area

Oppgave 1 Anta $g(x)$ er den omvendte funksjonen til $f(x)$. Bestem:

a) $g(10)$ hvis $f(3) = 10$

b) $f(g(5))$

c) $f(\sqrt{2})$ hvis $g(3) = \sqrt{2}$

d) $g(f(9))$

Oppgave 2 Finn den omvendte funksjonen $g(x)$ og definisjonsmengden D_g til funksjonen $f(x)$ med definisjonsmengde D_f.

a) $f(x) = 2x - 3$ med D_f = hele tallinjen

b) $f(x) = 0{,}5x + 1{,}5$ med D_f = hele tallinjen

c) $f(x) = x^2 + 6x$ med $D_f = \langle -\infty, -3]$

d) $f(x) = 20 + \frac{1}{x-3}$ med $D_f = \langle 3, \infty \rangle$

e) $f(x) = (x-1)^3 + 50$ med $D_f = [1, \infty\rangle$

f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x} & \text{hvis } 0 < x \leqslant 10 \\ 2 - \frac{x}{10} & \text{hvis } 10 < x \leqslant 20 \end{cases}$$

Oppgave 3 Finn funksjonsuttrykket til den omvendte funksjonen med definisjonsmengde og verdimengde.

a) $f(x) = \frac{4x-10}{x-3}$

b) $f(x) = \frac{70-40x}{3-2x}$

c) $f(x) = \sqrt{2x-3} + x$

Oppgave 4 Vi har (tilnærmet) $\ln 2 = 0{,}6931$ og $\ln 3 = 1{,}0986$ og $\ln 5 = 1{,}6094$. Bruk disse tallene til å finne verdiene (tilnærmet) uten å bruke ln-tasten på kalkulatoren.

a) $\ln 250$ b) $\ln 625$ c) $\ln \frac{625}{216}$

d) $\ln \frac{1\,000\,000}{27}$ e) $\ln 130 - \ln 78$ f) $\ln \sqrt[10]{6}$

Oppgave 5 Løs likningene.

a) $e^{2x+1} = 5$ b) $\ln(x-3) = -2$ c) $e^{2x+1} = 3e^{x+2}$

d) $\ln(x-3) = \ln(2x+1)+1$ e) $e^{2x} - 4e^{x} - 5 = 0$ f) $\frac{20\ln\sqrt{x}}{1-\ln x} = 10$

Oppgave 6 Løs ulikhetene.

a) $e^{2x+1} \geqslant 5$ b) $\ln(x-3) < -2$ c) $\frac{3e^x}{e^x+1} < 5$ d) $\ln \frac{3x-2}{x-7} \geqslant 0$

Oppgave 7 Finn asymptotene til funksjonen.

a) $f(x) = e^{-0.1x} + 23$ b) $f(x) = \ln(10-x)$

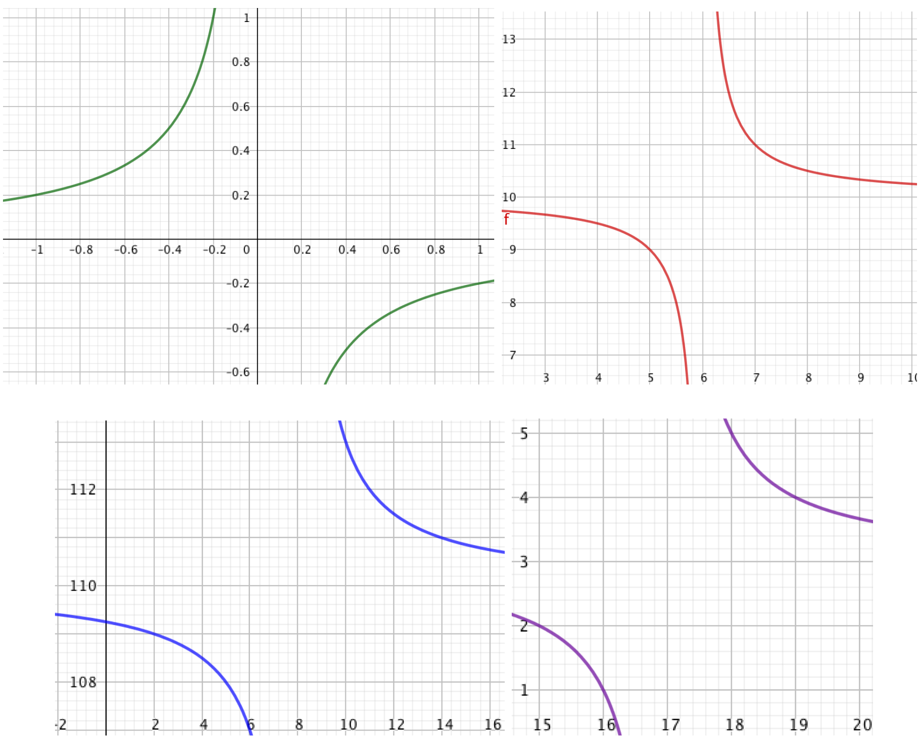
c) $f(x) = e^{x(10-x)} + 50$ d) $f(x) = (100x^3 + 70x + 1000)e^{-\frac{x}{100}}$

e) $f(x) = \frac{100e^{0{,}04x}}{e^{0{,}04x}+50}$ f) $f(x) = \ln(x^2 - 400)$

g) $f(x) = \ln(120x+10) - \ln(20x-30)$, $D_f = \langle \frac{3}{2}, \infty \rangle$

Oppgave 8 Finn den omvendte funksjonen $g(x)$ og definisjonsmengden D_g til funksjonen $f(x)$ med definisjonsmengde D_f.
(a) $f(x) = e^{\frac{x}{3}} - 1$ med $D_f = [0,\infty\rangle$ (b) $f(x) = 4\ln(x-10)$ med $D_f = [11,\infty\rangle$
(c) $f(x) = e^{\frac{2}{x+10}}$ med $D_f = [0,\infty\rangle$ (d) $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 7)$ med $D_f = [0,1\rangle$

Oppgave 9 Bestem funksjonsuttrykket $f(x) = c + \frac{a}{x-b}$ til hyperblene (a-d) i figur 1.



Figur 1: Hyperbler a-d

Oppgave 10 Bestem asymptotene til hyperblene (a-d) i oppgave 9.

Oppgave 11 Bestem asymptotene til de rasjonale funksjonene.

a) $f(x) = \frac{4x-10}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{70-40x}{3-2x}$ c) $f(x) = \frac{3x^2-6x+8}{x^2+3}$

d) $f(x) = \frac{4x^2-28x+40}{x^2-4x+3}$ e) $f(x) = \frac{x^2+3x+5}{x-7}$ f) $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-10x+16}$

Oppgave 12 Avgjør om funksjonen $f(x)$ har et nullpunkt i intervallet I. Tips: Skjæringssetningen!
a) $f(x) = \sqrt{x-2} - x + 3$ og $I = [4, 5]$
b) $f(x) = (x-5)\sqrt{(0{,}2x+5)} - 0{,}2(x-3)^2$ og $I = [5, 15]$
c) $f(x) = \frac{4x-10}{x-3} - 4$ og $I = [2, 4]$

Fasit

Oppgave 1

a) 3 b) 5 c) 3 d) 9

Oppgave 2

a) $g(x) = 0{,}5x + 1{,}5$ med $D_g = \langle -\infty, \infty \rangle$ b) $g(x) = 2x - 3$, $D_g = \langle -\infty, \infty \rangle$

c) $g(x) = -3 - \sqrt{x+9}$, $D_g = V_f = [-9, \infty\rangle$ d) $g(x) = 3 + \frac{1}{x-20}$, $D_g = \langle 20, \infty \rangle$

e) $g(x) = \sqrt[3]{x-50} + 1$, $D_g = [50, \infty\rangle$

f)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{10}{x} & \text{hvis } x \geqslant 1 \\ 20 - 10x & \text{hvis } 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

Oppgave 3
a) $x = f^{-1}(y) = \frac{3y-10}{y-4}$, $D_{f^{-1}}$ er alle tall bortsett fra 4 ($D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$) og $V_{f^{-1}}$ er alle tall bortsett fra 3 ($V_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$)
b) $x = f^{-1}(y) = \frac{70-3y}{40-2y}$, $D_{f^{-1}}$ er alle tall bortsett fra 20 ($D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{20\}$), $V_{f^{-1}}$ er alle tall bortsett fra $\frac{3}{2}$ ($V_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$)
c) $x = f^{-1}(y) = y + 1 - \sqrt{2y-2}$, $D_{f^{-1}} = [\frac{3}{2}, \infty\rangle$ (selv om uttrykket er definert for $y \geqslant 1$), $V_{f^{-1}} = [\frac{3}{2}, \infty\rangle$.

Oppgave 4

a) $\ln 250 = \ln 2 + 3\ln 5 = 0{,}6931 + 3 \cdot 1{,}6094 = 5{,}5213$ b) $\ln 625 = 4\ln 5 = 4 \cdot 1{,}6094 = 6{,}4376$

c) $\ln \frac{625}{216} = 4\ln 5 - 3(\ln 3 + \ln 2) = 4 \cdot 1{,}6094 - 3(1{,}0986 + 0{,}6931) = 1{,}0625$ d) $\ln \frac{1\,000\,000}{27} = 6(\ln 5 + \ln 2) - 3\ln 3 = 6 \cdot (1{,}6094 + 0{,}6931) - 3 \cdot 1{,}0986 = 10{,}5192$

e) $\ln 130 - \ln 78 = \ln 5 + \ln 26 - \ln 3 - \ln 26 = 1{,}6094 - 1{,}0986 = 0{,}5108$ f) $\ln 6^{\frac{1}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \ln 6 = \frac{1{,}0986+0{,}6931}{10} = 0{,}1792$

Oppgave 5

a) $x = \frac{1}{2}(\ln(5) - 1)$ b) $x = 3 + e^{-2}$ c) $x = 1 + \ln(3)$

d) $x = -\dfrac{e+3}{2e-1}$ e) $x = \ln 5$ f) $x = e^{0{,}5}$

Oppgave 6

a) Fordi $\ln x$ er en strengt voksende funksjon for $x > 0$ kan vi sette inn vs og hs i $\ln x$ og beholde ulikheten. Det gir $x \geqslant \frac{1}{2}(\ln 5 - 1)$.

b) Fordi e^x er en strengt voksende funksjon kan vi sette inn vs og hs i e^x og beholde ulikheten. Det gir $3 < x < 3 + e^{-2}$.

c) Alle tallene på tallinjen (kalles for de reelle tallene og skrives $\mathbb{R}$, dvs $x \in \mathbb{R}$).

d) Legg merke til at ulikheten bare er definert for $x < \frac{3}{2}$ og for $x > 7$. Vi setter inn vs og hs i e^x og beholder ulikheten. Dette gir $\frac{3x-2}{x-7} \geqslant 1$ som vi så løser: $x \leqslant -\frac{5}{2}$ eller $x > 7$ (og dette er innenfor definisjonsområdet for ulikheten). Alternativ skrivemåte: $x \in \langle -\infty, -\frac{5}{2}] \cup \langle 7, \infty \rangle$.

Oppgave 7

a) horisontal asymptote: $y = 23$

b) vertikal asymptote: $x = 10$

c) horisontal asymptote: $y = 50$

d) horisontal asymptote: $y = 0$

e) horisontale asymptoter: $y = 100$ $(x \to \infty)$ og $y = 0$ $(x \to -\infty)$

f) vertikale asymptoter: $x = \pm 20$

g) vertikal asymptote: $x = \frac{3}{2}$, horisontal asymptote: $y = \ln 6$

Oppgave 8

a) $g(x) = 3\ln(x+1)$, $D_g = V_f = [0, \infty\rangle$

b) $g(x) = e^{\frac{x}{4}} + 10$, $D_g = [0, \infty\rangle$

c) $g(x) = \frac{2}{\ln x} - 10$, $D_g = \langle 1, \sqrt[5]{e}]$

d) $g(x) = 3 - \sqrt{e^x + 2}$, $D_g = \langle \ln 2, \ln 7]$

Oppgave 9

a) $f(x) = -\frac{1}{5x}$ b) $f(x) = 10 + \frac{1}{x-6}$ c) $f(x) = 110 + \frac{6}{x-8}$ d) $f(x) = 3 + \frac{2}{x-17}$

Oppgave 10

a) vertikal asymptote: $x = 0$, horisontal asymptote: $y = 0$

b) vertikal asymptote: $x = 6$, horisontal asymptote: $y = 10$

c) vertikal asymptote: $x = 8$, horisontal asymptote: $y = 110$

d) vertikal asymptote: $x = 17$, horisontal asymptote: $y = 3$

Oppgave 11

a) $f(x) = 4 + \frac{2}{x-3}$ så vertikal asymptote: $x = 3$, horisontal asymptote: $y = 4$

b) $f(x) = 20 + \frac{10}{3-2x}$ så vertikal asymptote: $x = \frac{3}{2}$, horisontal asymptote: $y = 20$

c) $f(x) = 3 - \frac{6x+1}{x^2+3}$ så ingen vertikal asymptote, horisontal asymptote: $y = 3$

d) $f(x) = 4 - \frac{4(3x-7)}{(x-1)(x-3)}$ så vertikale asymptoter: $y = 1$ og $y = 3$, horisontal asymptote: $x = 4$

e) $f(x) = x + 10 + \frac{75}{x-7}$ så vertikal asymptote: $x = 7$, skrå asymptote: $y = x + 10$

f) $f(x) = x + 10 + \frac{84}{x-8}$ så vertikal asymptote: $x = 8$, skrå asymptote: $y = x + 10$

Oppgave 12

a) $f(x)$ har nullpunkt mellom $x = 4$ og $x = 5$ ved skjæringssetningen fordi $f(4) = \sqrt{4-2} - 4 + 3 = 0{,}41 > 0$ mens $f(5) = \sqrt{5-2} - 5 + 3 = -0{,}27 < 0$ og funksjonen er definert og kontinuerlig på hele intervallet.

b) $f(x)$ har nullpunkt mellom $x = 5$ og $x = 6$ ved skjæringssetningen fordi $f(5) = -0{,}80$ mens $f(6) = 0{,}69 > 0$ og funksjonen er definert og kontinuerlig på hele intervallet.
NB: $f(15) = -0{,}52 < 0$ sammen med $f(6) > 0$ forteller at $f(x)$ har nullpunkt mellom $x = 6$ og $x = 15$. Så f(x) har minst 2 nullpunkter på intervallet $[5, 15]$.

c) $f(x) = \frac{2}{x-3}$ har ingen nullpunkter på intervallet $I = [2, 4]$ fordi likningen $\frac{2}{x-3} = 0$ ikke har noen løsninger. NB: Vi kan ikke bruke skjæringssetningen selv om $f(2) = -2 < 0$ og $f(4) = 2 > 0$ fordi $f(x)$ ikke er definert i hele intervallet (selv om $f(x)$ er kontinuerlig for alle x der den er definert).