MET1181 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2019
Oppgaver

I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 14

Kap 4.8-9: l'Hôpitals regel. Grenseinntekt og -kostnad. Elastisitet.

Under står det anbefalte oppgaver fra læreboken [L] og noen eksamensoppgaver. Oppgaveboken innholder løsningsforslag til alle oppgavene i læreboken og noen flere oppgaver.

[L] **4.8** 1-2
[L] **4.9** 1-8

Flervalgseksamen 2015h oppg 11 og 15
Flervalgseksamen 2016v oppg 13
Flervalgseksamen 2016h oppg 12 og 14
Flervalgseksamen 2017v oppg 12
Flervalgseksamen 2018v oppg 12

Oppgaver for veiledningstimene
mandag 11/11 fra kl 14 i Study Area

Oppgave 1 Beregn grenseverdiene.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-x}{25(x-1)}$ b) $\lim\limits_{x\to \ln 5} \dfrac{e^x-5}{x^2-5}$ c) $\lim\limits_{x\to \ln 5} \dfrac{e^x-5}{x^2-(\ln 5)^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7x}{e^x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{10}}{e^x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{e^{2x}-e^2}$ h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1}$ i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^{x^2-3x+2}-1}{x^2-4}$

Oppgave 2 Beregn grenseverdiene ved å bruke l'Hôpitals regel.

(a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-x}{25(x-1)}$ (b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-4x+10}{e^x-5}$ (c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$

Oppgave 3 Forklar hvorfor $K(x)$ er en kostnadsfunksjonen ved å sjekke de tre kriteriene:
(1) $K(0) > 0$
(2) $K(x)$ er en voksende funksjon
(3) $K(x)$ er en konveks funksjon
Bestem også konstandsoptimum og hva enhetsprisen er ved kostnadsoptimum.

a) $K(x) = 0{,}01x^2 + 8x + 2500,\ x \geqslant 0$ b) $K(x) = 0{,}05(x+200)^2,\ x \geqslant 0$

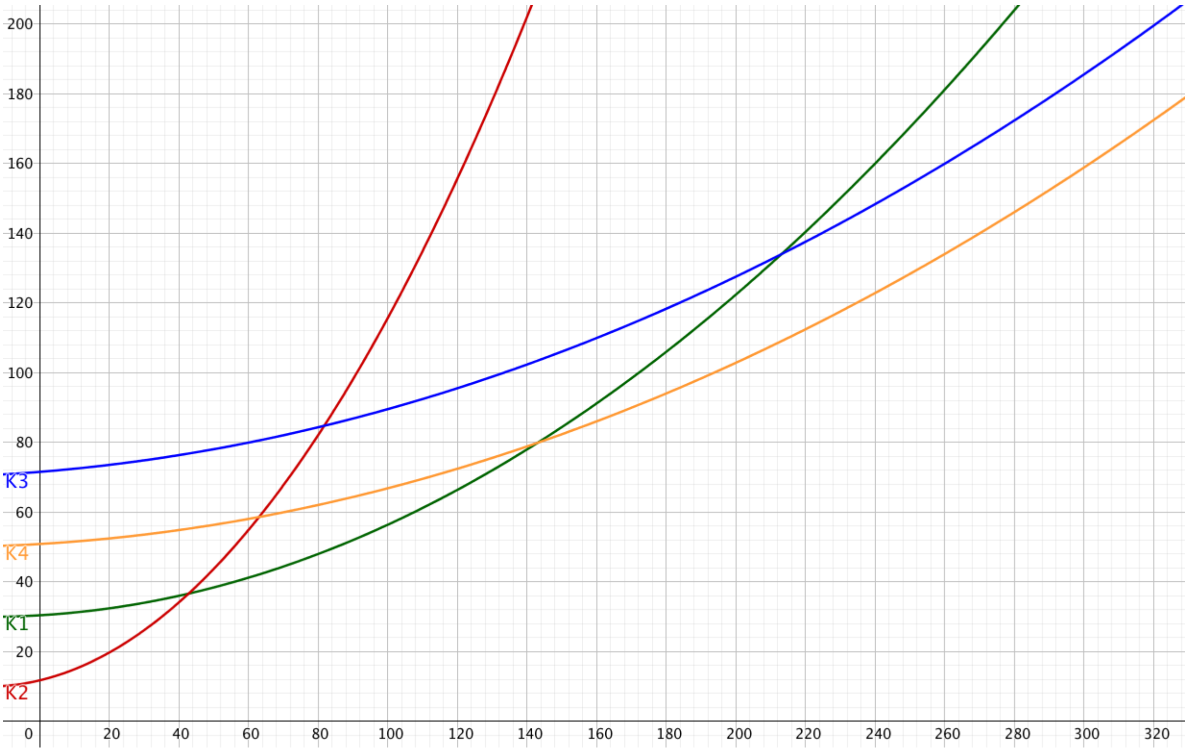
c) $K(x) = 400e^{0{,}001x^2},\ x \geqslant 0$ d) $K(x) = 1000e^{0{,}0004(x+5)^2},\ x \geqslant 0$

e) $K(x) = 50x + 1000,\ 0 \leqslant x \leqslant 1000$

Oppgave 4 $K(x)$ er kostnadsfunksjonen, $I(x)$ er inntektsfunksjonen og x er antall produserte og solgte enheter. Finn profittmaksimerende kvantum.

a) $K(x) = 0{,}01x^2 + 8x + 2500$ og $I(x) = 100x$ for $x \geqslant 0$
b) $K(x) = 0{,}005x^2 + 20x + 30000$ og $I(x) = 50x$ for $0 \leqslant x \leqslant 2000$

Oppgave 5 I figur 1 ser du grafen til fire forskjellige kostnadsfunksjoner.
a) Lage en rekkefølge av kostnadsfunksjonene fra den med minste optimale enhetskostnad til den med største optimale enhetskostnad.
b) Finn en tilnærmet verdi for kostnadsoptimum for hver av kostnadsfunksjonene.
c) Finn en tilnærmet verdi for optimal enhetskostnad for hver av kostnadsfunksjonene.



Figur 1: Fire kostnadsfunksjoner (K_1–K_4)

Oppgave 6 La p være prisen på en vare og $D(p)$ etterspørselen (= antall solgte enheter). Bestem den relative prisendringen, den relative etterspørselsendringen og priselastisiteten. Avgjør om etterpørselen er elastisk, uelastisk eller nøytralelastisk.
a) $D(30) = 40$ og $D(30{,}5) = 39$
b) $D(20) = 101$ og $D(21) = 100{,}95$
c) $D(10) = 24{,}648$ og $D(10{,}01) = 24{,}623$

Oppgave 7 La p være prisen på en vare og $D(p)$ etterspørselen (= antall solgte enheter). Beregn den momentane priselastisiteten $\varepsilon(p) = \mathrm{El}_p(D(p))$. Bestem prisen p slik at etterpørselen er elastisk, uelastisk og nøytralelastisk.
a) $D(p) = 100 - 2p$ med $0 < p < 50$
b) $D(p) = 100 + \frac{20}{p}$ med $p \geqslant 1$
c) $D(p) = 67e^{-0.1p}$ med $p > 0$
d) $D(p) = 100 + \frac{900}{p^2}$ med $p \geqslant 1$
e) $D(p) = 53e^{-0.02p^2}$ med $p > 0$

Fasit

Oppgave 1

a) $\frac{-3}{25(3-1)} = -0{,}06$ b) 0 c) $\frac{5}{2\ln 5}$

d) 7 e) 0 f) $0{,}5$

g) $\frac{1}{2e^2}$ h) 2 i) $\frac{1}{4}$

Oppgave 2

a) $\frac{-1}{25}$ b) $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ c) 0

Oppgave 3

a) $K(0) = 2500 > 0$, $K'(x) = 0{,}02x + 8 > 0$ for $x > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geqslant 0$, $K''(x) = 0{,}02 > 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geqslant 0$. Kostnadsoptimum $x = 500$ gir minimal enhetspris $A(500) = 18$

b) $K(0) = 2000 > 0$, $K'(x) = 0{,}1x + 20 > 0$ for $x > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geqslant 0$, $K''(x) = 0{,}1 > 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geqslant 0$. Kostnadsoptimum $x = 200$ gir minimal enhetspris $A(200) = 40$

c) $K(0) = 400 > 0$, $K'(x) = 0{,}8xe^{0{,}001x^2} > 0$ for $x > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geqslant 0$, $K''(x) = 0{,}8(1 + 0{,}002x^2)e^{0{,}001x^2} > 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geqslant 0$. Kostnadsoptimum $x = 22{,}36$ gir minimal enhetspris $A(22{,}36) = 29{,}49$

d) $K(0) = 1010{,}05 > 0$, $K'(x) = 0{,}8(x + 5)e^{0{,}0004(x+5)^2} > 0$ for $x > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geqslant 0$, $K''(x) = 0{,}8[1 + 0{,}0008(x + 5)^2]e^{0{,}0004(x+5)^2} > 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geqslant 0$. Kostnadsoptimum $x = 32{,}94$ gir minimal enhetspris $A(32{,}94) = 53{,}99$

e) $K(0) = 1000 > 0$, $K'(x) = 50 > 0$ så $K(x)$ er en voksende funksjon for $x \geqslant 0$, $K''(x) = 0 \geqslant 0$ så $K(x)$ er en konveks funksjon for $x \geqslant 0$. Kostnadsoptimum $x = 1000$ gir minimal enhetspris $A(1000) = 51$

Oppgave 4

a) For $x = 4600$ er grensekostnad lik grenseinntekt og $\pi''(x) = -0{,}02 < 0$ gir at profittfunksjonen er konkav og dermed er $x = 4600$ et profittmaksimerende kvantum.

b) For $x = 3000$ er grensekostnad lik grenseinntekt, men dette ligger utenfor gyldighetsområdet (definisjonsområdet) for modellen. Vi ser at $\pi'(x) = 30 - 0{,}01x$ er positiv for $x < 3000$ som gir at profittfunksjonen er voksende for x i intervallet $[0, 2000]$ og dermed er $x = 2000$ et profittmaksimerende kvantum.

Oppgave 5

a) K_4, K_1, K_3, K_2

b) $K_4:\ x = 220,\ K_1:\ x = 120,\ K_3:\ x = 270,\ K_2: 40$

c) $A_4(220) = \frac{112}{220} = 0{,}51,\ A_1(120) = \frac{65}{120} = 0{,}54,\ A_3(270) = \frac{165}{270} = 0{,}61,\ A_2(40) = \frac{35}{40} = 0{,}88$

Oppgave 6

a) relativ prisendring er $\frac{0{,}5}{30}$, relativ etterspørselsendring er $\frac{-1}{40}$ og priselastisiteten er $-1{,}5$, dvs elastisk

b) relativ prisendring er $\frac{1}{20}$, relativ etterspørselsendring er $\frac{-0{,}05}{101}$ og priselastisiteten er $-0{,}0099$, dvs uelastisk

c) relativ prisendring er $0{,}001$, relativ etterspørselsendring er $-0{,}001014$ og priselastisiteten er $-1{,}014$, dvs elastisk

Oppgave 7

a) $\varepsilon(p) = \frac{-2p}{100-2p}$. Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for $p = 25$, uelastisk for $0 < p < 25$ og elastisk for $25 < p < 50$.

b) $\varepsilon(p) = -\frac{1}{5p+1}$. Etterspørselsfunksjonen er uelastisk for alle $p \geqslant 1$.

c) $\varepsilon(p) = -0{,}1p$. Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for $p = 10$, uelastisk for $0 < p < 10$ og elastisk for $p > 10$.

d) $\varepsilon(p) = -\frac{18}{p^2+9}$. Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for $p = 3$, elastisk for $1 \leqslant p < 3$ og uelastisk for $p > 3$.

e) $\varepsilon(p) = -0{,}04p^2$. Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for $p = 5$, uelastisk for $0 < p < 5$ og elastisk for $p > 5$.