MET1181 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2019
Oppgaver

I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 15
Kap 4.10: Linearisering. Taylorpolynomer og Taylorrekker.

Under står det anbefalte oppgaver fra læreboken [L] og noen eksamensoppgaver. Oppgaveboken innholder løsningsforslag til alle oppgavene i læreboken og noen flere oppgaver.

[L] **4.10** 1-7

Repetisjon:
Flervalgseksamen 2015h oppg 11

Oppgaver for veiledningstimene
mandag 15/11 fra kl 14 i Study Area

Oppgave 1
a) Finn Taylorpolynomene $P_1(x), \dots, P_4(x)$ av grad $1-4$ til funksjonen $f(x) = e^x$ i 0.
b) Beregn $P_1(1), \dots, P_4(1)$ og beregn hvor gode tilnærminger disse verdiene gir til $f(1) = e$.

Oppgave 2
a) Finn Taylorpolynomene $P_1(x), \dots, P_4(x)$ av grad $1-4$ til funksjonen $f(x) = xe^x$ i 0.
b) Beregn $P_1(1), \dots, P_4(1)$ og beregn hvor gode tilnærminger disse verdiene gir til $f(1) = e$.

Oppgave 3
a) Finn Taylorpolynomene $P_1(x), \dots, P_4(x)$ av grad $1-4$ til funksjonen $f(x) = \ln(x)$ i 1.
b) Beregn $P_1(2), \dots, P_4(2)$ og beregn hvor gode tilnærminger disse verdiene gir til $f(2) = \ln(2)$.

Oppgave 4 Finn Taylorpolynomene $P_1(x), \dots, P_4(x)$ av grad $1-4$ til funksjonen $f(x) = x^4$ i 0.

Oppgave 5 Finn Taylorpolynomene $P_1(x), \dots, P_4(x)$ av grad $1-4$ til funksjonen $f(x) = \frac{1}{1-x}$ i 0.

Oppgave 6 La $P_1(x), \dots, P_4(x)$ være Taylorpolynomene i oppgave 1. Beregn grenseverdiene.

$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - P_1(x)}{x^2} \quad \text{b)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - P_2(x)}{x^3} \quad \text{c)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - P_3(x)}{x^4} \quad \text{d)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - P_4(x)}{x^5}$$

Oppgave 7 La $P_1(x), \dots, P_4(x)$ være Taylorpolynomene i oppgave 3. Beregn grenseverdiene.

$$\text{a)} \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) - P_1(x)}{(x-1)^2} \quad \text{b)} \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) - P_2(x)}{(x-1)^3} \quad \text{c)} \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) - P_3(x)}{(x-1)^4} \quad \text{d)} \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) - P_4(x)}{(x-1)^5}$$

Oppgave 8 (Flervalgseksamen 2017v, oppg 12)
Vi betrakter priselastisiteten $\varepsilon = \varepsilon(p)$ for en vare med etterspørsel gitt ved $D(p) = 120 - 8p$. Da er:
(A) $\varepsilon > -1$ for $p = 7{,}5$
(B) $\varepsilon > -1$ for $p < 7{,}5$
(C) $\varepsilon > -1$ for $p > 7{,}5$
(D) $\varepsilon > -1$ for alle verdier av p
(E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 9 (Flervalgseksamen 2016h, oppg 12)
Etterspørsel etter en vare er gitt ved $D(p) = 110 - 5p$. Da er elastisiteten $\varepsilon(p) = -1$ for:
(A) $p = 7$
(B) $p = 11$
(C) $p = \frac{16}{5}$
(D) $p = 22$
(E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 10 (Flervalgseksamen 2017v, oppg 4)
En bedrift har kostnadsfunksjonen $C(x) = 205x^3 - 120x^2 + 2000x + 2800$ når $x \geqslant 0$. Hva er den minimale enhetskostnaden?
(A) 2 kr
(B) 12 kr
(C) 3980 kr
(D) 7960 kr
(E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 11 (Flervalgseksamen 2016h, oppg 14)
Vi betrakter grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - x\ln(x)}{e^x}$$

Hvilket utsagn er sant?
(a) Grenseverdien eksisterer ikke
(b) Grenseverdien er 1
(c) Grenseverdien er $-\frac{1}{2}$
(d) Grenseverdien er 0
(e) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 12 (Flervalgseksamen 2015h, oppg 15)
Vi betrakter grenseverdien

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Hvilket utsagn er sant?
(a) Grenseverdien eksisterer ikke
(b) Grenseverdien er 0
(c) Grenseverdien er 1
(d) Grenseverdien er $-\frac{1}{2}$
(e) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Fasit

Oppgave 1

a) $P_1(x) = 1 + x$, $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, $P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

b) $P_1(1) = 2$, $P_2(1) = 2{,}5$, $P_3(1) = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$, $P_4(x) = \frac{65}{24} \approx 2{,}71$. Avstanden fra $f(1) = e$ er (tilnærmet): $|f(1) - P_1(1)| = |e - 2| = 0{,}72$, $|f(1) - P_2(1)| = |e - 2{,}5| = 0{,}22$, $|f(1) - P_3(1)| = |e - \frac{8}{3}| = 0{,}052$, $|f(1) - P_4(1)| = |e - \frac{65}{24}| = 0{,}0099$

Oppgave 2

a) $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x + x^2$, $P_3(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2}$, $P_4(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6}$

b) $P_1(1) = 1$, $P_2(1) = 2$, $P_3(1) = 2{,}5$, $P_4(x) = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$. Avstanden fra $f(1) = e$ er (tilnærmet): $|f(1) - P_1(1)| = |e - 1| = 1{,}72$, $|f(1) - P_2(1)| = |e - 2| = 0{,}72$, $|f(1) - P_3(1)| = |e - 2{,}5| = 0{,}22$, $|f(1) - P_4(1)| = |e - \frac{8}{3}| = 0{,}052$

Oppgave 3

a) $P_1(x) = (x-1)$, $P_2(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}$, $P_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$, $P_4(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$

b) $P_1(2) = 1$, $P_2(2) = \frac{1}{2}$, $P_3(1) = \frac{5}{6} \approx 0{,}83$, $P_4(x) = \frac{7}{12} \approx 0.58$. Avstanden fra $f(2) = \ln(2)$ er (tilnærmet): $|f(2) - P_1(2)| = |\ln(2) - 1| = 0{,}31$, $|f(2) - P_2(2)| = |\ln(2) - \frac{1}{2}| = 0{,}19$, $|f(2) - P_3(2)| = |\ln(2) - \frac{5}{6}| = 0{,}14$, $|f(2) - P_4(2)| = |\ln(2) - \frac{7}{12}| = 0{,}11$

Oppgave 4 $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 0$, $P_3(x) = 0$, $P_4(x) = x^4$

Oppgave 5 $P_1(x) = 1 + x$, $P_2(x) = 1 + x + x^2$, $P_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$, $P_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

Oppgave 6

a) Dette er et $\frac{0}{0}$-uttrykk. Kan derfor bruke l'Hôpitals regel. Deriverer teller og nevner. Får et nytt $\frac{0}{0}$-uttrykk og bruker l'Hôpitals regel en gang til:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})}{x^3} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x)}{3x^2} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{6x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}$$

c) $\frac{1}{24}$

d) $\frac{1}{120}$

Oppgave 7

a) Dette er et $\frac{0}{0}$-uttrykk. Kan derfor bruke l'Hôpitals regel. Deriverer teller og nevner. Får et nytt $\frac{0}{0}$-uttrykk og bruker l'Hôpitals regel en gang til:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) - (x-1)}{(x-1)^2} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) - [(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}]}{(x-1)^3} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - [1 - (x-1)]}{3(x-1)^2} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2} + 1}{6(x-1)} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x^3}}{6} = \frac{1}{3}$$

c) $-\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{5}$

Oppgave 8 (Flervalgseksamen 2017v, oppg 12)
B

Oppgave 9 (Flervalgseksamen 2016h, oppg 12)
B

Oppgave 10 (Flervalgseksamen 2017v, oppg 4)
C

Oppgave 11 (Flervalgseksamen 2016h, oppg 14)
D

Oppgave 12 (Flervalgseksamen 2015h, oppg 15)
D